hep-th/9803083

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

SPIN 2 EN DIMENSIÓN 2+1

Trabajo final presentado a la Universidad Simón Bolívar por el

Lic. Pío J. Arias

como requisito parcial para optar al título de

Doctor en Física

Realizado con la asesoría del

Prof. Carlos Aragone

Febrero, 1994

A la memoria de mi padre,
Pío José Arias B.
A Zulay y Dafne

RESUMEN

En este trabajo se analizan dinámicamente distintas teorías masivas de spin 1 y spin 2, mostrando su equivalencia (entre teorías de igual spin) y su analogía (entre teorías de spin distinto). Se muestra una equivalencia canónica entre la teoría de spin 2 autodual y la teoría de gravedad Masiva Vectorial de Chern-Simons linealizada. Se introduce una teoría gravitatoria masiva curva, que no es invariante Lorentz en el espacio tangente, pero sí ante difeomorfismos. Se analiza la posibilidad de rotura de simetría en la teoría de spin 1 Topológica Masiva, y en las teorías de spin 2 masivas Topológica Masiva y vectorial de Chern-Simons linealizadas. Se estudia el comportamiento anyónico de las distintas teorías de spin 1 y spin 2, consiguiendo el análogo gravitacional de la teoría de Chern-Simons vectorial pura.

ÍNDICE GENERAL

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

El estudio de teorías vectoriales y tensoriales en dimensión 2+1 (2 espaciales + 1 temporal) estuvo, inicialmente motivado por su conexión con el comportamiento de modelos, en 3+1 dimensiones, a altas temperaturas [1]. Sin embargo, en la actualidad, la física planar (en 2+1 dimensiones) posee un interés real intrínseco, ya que presenta características propias que hacen sumamente atractivo su estudio y análisis en el contexto de la teoría cuántica de campos. Inclusive, al nivel mas fundamental se ha propuesto que a una escala planckiana los grados físicos de libertad observables podrían ser mejor descritos por una red bidimenional que evoluciona con el tiempo [2]. En esta dimensión espacio-temporal aparecen naturalmente y exclusivamente los "anyones" [3], o partículas con spin y estadística distintos a los que estamos acostumbrados en 3+1 dimensiones. Estas partículas podrían tener aplicaciones en física de la materia condensada [4,5]. En otro orden de ideas, la gravitación en 2+1 dimensiones es claro que tiene que jugar un papel importante en el estudio de fenómenos donde esten involucradas cuerdas cósmicas [6].

Las diferencias entre 2+1 y 3+1 dimensiones, empiezan a notarse si miramos las representaciones del grupo inhomogéneo de Lorentz, o grupo de Poincaré, en 2+1 dimensiones [7]. Si P^m representa al generador de las traslaciones y $M^{mn}(=-M^{nm})$ al generador de las transformaciones de Lorentz, el álgebra de Poincaré,

en 2+1 dimensiones, es

$$[P^m, P^n] = 0, \qquad (1,a)$$

$$[J^m, P^n] = -i\varepsilon^{mnl} P_l, \qquad (1,b)$$

$$[J^m, J^n] = i\varepsilon^{mnl} J_l, \qquad (1,c)$$

donde $J^m \equiv (1/2)\varepsilon^{mnl} M_{nl}$, se introduce por la antisimetría de M^{mn}. Mirando el sector del grupo de Lorentz $L_+^\uparrow$ (grupo propio, ortocrono), observamos que J^0 es el generador de las rotaciones espaciales y $-\varepsilon_{ij} J^j$ $(\varepsilon_{ij} = \varepsilon^{ij} = \varepsilon^{oij}, i, j = 1, 2)$ genera los "boosts" en la dirección X^i. (1,c) representa al álgebra del grupo de Lorentz SO(2,1) y es isomorfa a la del grupo SL(2,**R**) por lo que estos grupos admiten el mismo grupo de recubrimiento.

En 3+1 dimensiones las representaciones irreducibles estan caracterizadas por los autovalores de los casimires $P_m P^m$ y $W_m W^m$, donde $W_m \equiv (1/2)\varepsilon_{mnrl}\ P^n M^{rl}$ es el vector de Pauli-Lubanski. En cambio para 2+1 dimensiones el invariante de Pauli-Lubanski es un escalar $(\varepsilon_{mnl} P^m M^{nl} = 2P^m J_m)$. Así, las representaciones masivas están caracterizadas por los autovalores de $P_m P^m$ y $P_m J^m$ [8]

$$(P_m P^m + m^2)\psi = 0, \qquad (2,a)$$

$$(P_m J^m - mS)\psi = 0. \qquad (2,b)$$

En (2,b) no hay ninguna restricción sobre el valor de S, que representa el spin o "helicidad" de la representación. Este hecho marca una gran diferencia con la contraparte en 3+1 dimensiones donde el autovalor del invariante de Pauli-Lubanski es $-m^2 S(S+1)$ con $S \in$ "$\frac{1}{2}\mathbf{Z}''$ (conjunto de los múltiplos enteros de (1/2)), debido a la no abelianilidad del grupo de rotaciones en 3 dimensiones espaciales. En cambio, el grupo de rotaciones en el plano es abeliano, por lo que no hay restricciones para los autovalores del momento angular y, por ende, del spin.

En (2) observamos que para representaciones con masa nula, S no está bien definido. Sin embargo, existen dos realizaciones de estas representaciones con masa nula. Estas son la teoría de Maxwell, que es equivalente a la de un campo escalar, y la de Dirac, con espinores de dos componentes [7,9]. Para teorías con tensores de mas alto rango no hay excitaciones con masa nula. Existen análisis rigurosos donde se encuentra que las partículas creadas por campos localizables en regiones compactas poseen spin $S \in$ "$\frac{1}{2}\mathbf{Z}$", y se cumple el teorema spin-estadística. Esta restricción no existe para campos no localizables en regiones compactas, ni se obtiene información precisa respecto a la estadística [10,11].

En 2+1 dimensiones las transformaciones impropias de paridad, P, e inversión temporal T estan definidas como

$$P : (t, x, y) \longrightarrow (t, -x, y) \quad ; \quad T : (t, x, y) \longrightarrow (-t, x, y), \tag{3}$$

donde observamos que P no corresponde a la inversión espacial, como en 3+1 dimensiones. Esto se debe a que en el plano hacer inversión espacial es equivalente a una rotación. J^0 es sensible a P y T, por lo que bajo estas transformaciones $S \to -S$, y puede probarse que el spin en 2+1 viola P y T [12]. Si quisieramos tener una teoría invariante bajo estas transformaciones discretas debemos tener presentes pares de partículas de igual masa y spines opuestos.

En vista de lo expuesto anteriormente, si queremos una teoría de spin $S \neq 0$, ésta debe ser necesariamente masiva, y si describe una sola excitación masiva, la teoría violará P y T. Para los casos de spin 1 y 2, sucede que podemos sumarle a las acciones de Maxwell, S_M, y de Einstein, S_E, respectivamente, un término S_{TM}, de carácter topológico, y así obtener una teoría masiva, consistente, con spin 1 ó 2 según el caso. Estos términos estan relacionados con las clases características de Chern-Simons, de ahí la denominación de términos de Chern-Simons; además, violan P y T. A las teorías

resultantes se les llama teorías topológicas masivas (TM) del spin correspondiente [13,14]. Estas teorías tienen, respectivamente, las mismas simetrías que S_M y S_E.

Para la teoría TM vectorial (spin 1) y la gravedad TM linealizada (spin 2) tenemos una formulación equivalente de caracter autodual (AD). Para el caso de spin 1, la ecuación de movimiento de la teoría autodual es como la "raíz" de las ecuaciones de Proca para el campo vectorial [15,16]. Para el caso de spin 2 [17,18,31] las ecuaciones son como la "raíz" de las ecuaciones de Fierz-Pauli. Estas teorías autoduales son equivalentes como teorías libres a las correspondientes teorías TM. Para spin 3 y 4 también es posible construir teorías masivas de caracter autodual [19,20]. Estas formulaciones autoduales estan relacionadas con una formulación relativista reciente de anyones [8]. Es posible, también construir "acciones maestras" para spin 1 [16] y spin 2 [18] las cuales sobre las ecuaciones de movimiento ("on shell") se reducen a las acciones AD o TM, respectivas.

Volviendo a los anyones, aunque todavía no existe una teoría-a de campos definitiva que describa partículas con estadística y spin fraccionario, resulta interesante estudiar teorías donde las partículas bosónicas o fermiónicas adquieren spin y estadística fraccionaria a través de un mecanismo externo. Un ejemplo de esto es el modelo que resulta de acoplar minimalmente partículas cargadas con un campo electromagnético y tener adicionalmente un término de Chern-Simons (CS) [10,21,22]. En este caso el término de CS hace que las partículas se "vean" como puntos singulares del flujo magnético, y el generador de las rotaciones adquiere una contribución determinada por el acoplamiento con el término de CS [23]. Este cuadro es igual al que aparece cuando se estudia la mecánica cuántica de dos anyones con parámetros estadístico θ [65]. La fase del efecto Aharanov-Bohm resulta ser proporcional a θ. Se dice, entonces, que la estadística y spin del modelo han sido

implementados dinámicamente, y se hipotiza que este efecto pueda proveer las bases de una explicación teórica de la superconductividad a altas temperaturas críticas [24,25].

En el caso de acoplamiento con teorías de gravedad linealizada, basándonos en la similitud que existe entre la acción no relativista de una partícula cargada en un campo electromagnético y la acción no relativista de una partícula masiva en un campo gravitatorio débil [26], podemos definir el análogo gravitacional del punto de flujo magnético y tendremos lo que se conoce como efecto Aharanov-Bohm gravitacional [27,28]. Este análogo gravitacional fue analizado recientemente [29,30], en el contexto de la gravedad TM linealizada. Sin embargo, la analogía con la teoría TM vectorial se obtiene en determinados casos. Queda abierto, en la actualidad, el problema de poder implementar estadística y spin fraccionarios a nivel exacto, curvo.

Relacionado con la implementación dinámica de spin y estadística fraccionarios, tenemos el hecho de que cuando hay rotura espontánea de simetría, no es posible esta implementación [32,33]. De manera que, resulta importante, entre otros aspectos, ver la viabilidad física de poder romper las simetrías de las acciones de spin 2 masivo, y su repercusión en el comportamiento anyónico de las teorías, viables, así obtenidas. En el caso vectorial al romper espontáneamente la teoría de CS pura nos queda en la parte vectorial la acción autodual, para la teoría TM nos queda, en cambio, una teoría de

Proca con un término de CS que describe dos excitaciones autoduales con masas distintas [34]. Para teorías de spin 3 esto se ha hecho, encontrando estrecha similitud con los casos vectoriales [20].

En este trabajo, se estudian teorías masivas de spin 1 y 2 desde un punto de vista comparativo, mostrando que los distintos fenómenos físicos que ocurren en las teorías de spin 1 tienen una

analogía uniforme en spin 2. Presentamos la teoría curva que llamamos Gravedad Vectorial masiva de Chern-Simons (VCS) cuya teoría linealizada aparece como análogo de la teoría TM vectorial. Además, encontramos el análogo gravitacional de la teoría de Chern-Simons pura vectorial en el contexto de la implementación dinámica de anyones. Por último mostramos que sólo en la teoría de gravedad VCS linealizada podemos romper consistentemente las simetrías que esta presenta, a diferencia de la teoría de gravedad TM linealizada donde no es posible hacerlo.

La organización es como sigue en el capítulo II analizamos las teorías de spin 1 masivo y las posibles equivalencias entre ellas. En el capítulo III realizamos un análisis análogo, mas extenso, de las teorías de spin 2 masivo. Parte de los análisis dinámicos hechos para spin 1 y spin 2, son hechos heurísticamente usando los proyectores que se introducen en el apéndice B. Además, mostramos una equivalencia canónica entre la acción autodual de spin 2 y la acción de la gravedad VCS linealizada, se analiza su posible conexión canónica con la teoría TM linealizada. En el capítulo IV presentamos la acción curva de la gravedad VCS. En el capítulo V, miramos las teorías con rotura de simetría correspondientes a la acción TM vectorial, VCS linealizada y TM linealizada. Encontramos que en este último caso, este proceso no es consitente. Por último, en el capítulo VI estudiamos el comportamiento anyónico en teorías vectoriales y de gravedad linealizada. Observamos que permitiendo acoplamientos no minimales los parámetros de comportamiento anyónico son radicalmente distintos.

Capítulo **II**

TEORÍAS DE SPIN 1 MASIVO

Las teorías de spin 1 masivo, por ser mas tratables que las de spin 2 masivo, resultan un laboratorio muy conveniente antes de abordar los problemas que querramos estudiar. En este capítulo analizamos tres teorías de spin 1 masivo que son equivalentes como teorías libres. Estas ya han sido presentadas y analizadas anteriormente [13-16,35,36], sin embargo damos aquí un análisis personal de ellas, el cual nos servirá de base al abordar el análisis de las teorías de spin 2 masivo.

1.- La acción autodual

La acción de Proca, es la usual

$$S_P =< -\frac{1}{2}F_{mn}F^{mn} - \frac{1}{2}m^2 a_r a^r >, \tag{1.1}$$

con ecuaciones de movimiento

$$\partial^m F_{mn} - m^2 a_n = 0, \tag{1.2}$$

las cuales aseguran que se cumple la condición de Lorentz $\partial^m a_m = 0$. Las dos componentes independientes que quedan corresponden a las excitaciones que se propagan en esta teoría.

En D = 2+1 es posible hallar la "raíz cuadrada" de la ecuación (1.2), ésta es [15]

$$\pm\varepsilon_m{}^{ln}\partial_l a_n - m a_m = 0. \tag{1.3}$$

La ecuación (1.3) implica, igualmente, que $\partial^m a_m = 0$. Covariantemente, usando los proyectores* $P_{\pm m}{}^n = \frac{1}{2}(P_m{}^n \pm \xi_m{}^n)$, la reescribiremos como

$$[\pm\Box^{1/2}(P_{+m}{}^n - P_{-m}{}^n) - m(P_{+m}{}^n + P_{-m}{}^n)]a_n = 0, \tag{1.4}$$

donde hemos usado el hecho de que a_m es transverso. Esta última ecuación, debido a que los $P_\pm$ son “ortogonales”, es equivalente a

$$\pm(\Box^{1/2} \mp m)P_{+m}{}^n a_n = 0, \tag{1.5,a}$$

$$\pm(\Box^{1/2} \pm m)P_{-m}{}^n a_n = 0, \tag{1.5,b}$$

de donde observamos que el signo “mas” (“menos”) en (1.3) corresponde a una excitación física de masa m y spin +1(-1).

Decimos que un campo vectorial a_m que verifica (1.3) es autodual. A la acción que tiene a la condición de autodualidad como ecuación de movimiento se le denomina acción Autodual (AD) de spin 1. Esta es [15]

$$S_{AD} = \frac{m}{2} < a_r \varepsilon^{rmn}\partial_m a_n - m a^r a_r > . \tag{1.6}$$

La acción S_{AD}, a diferencia de la de Proca, es sensible a paridad (P) e inversión temporal (T) debido a la presencia del término de CS [14]. El signo del término $-m^2 a_r a^r$ debe ser el que tiene en la acción, ya que si lo cambiamos daría origen a un hamiltoniano no definido positivo. Sin embargo el término de CS puede tener cualquier signo, éste determina la helicidad de la propagación, tal como mostramos en (1.5). Una manera de construir un sistema invariante bajo P y T es tomar una acción, con dos campos de

*Ver apéndice B

calibre a_{1m} y a_{2m}, donde el término de CS para cada campo de calibre tenga signo distinto y definir P y T de forma que incluya un cambio de los 2 campos [35].

Podemos mirar, rápidamente, la acción reducida de S_{AD}. Descomponemos a_m en

$$a_0 = a, \tag{1.7,a}$$

$$a_i = \varepsilon_{ij}\partial_j a^T + \partial_i a^L. \tag{1.7,b}$$

Al hacer la descomposición 2+1 de S_{AD}, aparece un vínculo cuadrático asociado a a_0 que resolvemos

$$a = \frac{1}{m}\Delta a^T, \tag{1.8}$$

al sustituirlo nos lleva a la forma

$$S = \frac{1}{2} < -2m\Delta a^L \dot{a}^T - \Delta a^T \Delta a^T + m^2(a^T \Delta a^T + a^L \Delta a^L) > . \tag{1.9}$$

Haciendo las redefiniciones

$$Q \equiv (-\Delta)^{1/2} a^T \tag{1.10,a}$$

$$\pi = m(-\Delta)^{1/2} a^L \tag{1.10,b}$$

llegamos a la forma final de la acción reducida

$$S_{AD}^{(red)} =< \pi\dot{Q} - \frac{1}{2}\pi\pi - \frac{1}{2}Q(-\Delta + m^2)Q > . \tag{1.11}$$

De esta última relación observamos que la excitación es masiva, con masa m. Además distinguimos la densidad hamiltoniana $\mathcal{H}$, en función de las variables independientes, pues $\mathcal{L}_{AD}^{(red)} \sim p\dot{q} - \mathcal{H}$. Notamos, entonces, que: 1) $\mathcal{H}$ es definida positiva, 2) si cambiamos el signo de m^2 en S_{AD} terminaremos con una $\mathcal{H}$ no definida positiva, 3) el término de CS puede tener cualquier signo ya que $\mathcal{H}$ es invariante si cambio m por $-m$.

2.- La acción Topológica Masiva vectorial

Esta teoría de spin 1 masivo es el centro de las otras teorías que aquí presentamos, ya que estas teorías por ser equivalentes a ella son tomadas como teorías alternas para la descripción de spin 1 masivo. La denominación de Topológica proviene del hecho que el término de CS tiene un significado topológico. Además, tiene la particularidad que el campo de calibre adquiere masa sin perder la invariancia de calibre usual. La acción TM es [13,14]

$$S_{TM} = \frac{1}{2} < -f_r f^r + 2 f_r \varepsilon^{rmn} \partial_m a_n - \mu a_r \varepsilon^{rmn} \partial_m a_n > . \tag{2.1}$$

Esta acción es invariante bajo las transformaciones de calibre $\delta a_m = \partial_m \xi$, $\delta f_m = 0$. Sus ecuaciones de movimiento

$$f^r = \varepsilon^{rmn} \partial_m a_n, \tag{2.2,a}$$

$$\varepsilon^{rmn} \partial_m f_n - \mu \varepsilon^{rmn} \partial_m a_n = 0, \tag{2.2,b}$$

nos conducen al sistema de ecuaciones, de segundo orden, para a_m

$$\partial_m F^{mr} - \mu \varepsilon^{rmn} \partial_m a_n = 0. \tag{2.3}$$

La helicidad de la excitación se obtiene si reescribimos (1.6) como

$$[\Box (P_{+m}{}^r + P_{-m}{}^r) - \mu \Box^{1/2} (P_{+m}{}^r - P_{-m}{}^r)] a_r = 0. \tag{2.4}$$

Si tomamos el calibre de Lorentz $\partial^m a_m = 0$, es inmediato notar que la excitación tiene masa μ y spin +1. Un tratamiento mas riguroso [14] nos muestra que el spin de la excitación es $\mu/|\mu|$.

Si hacemos la descomposición 2+1 de S_{TM}, tendremos que f_0 y a_0 son multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos

$$f_0 = \Delta a^T, \tag{2.5,a}$$

$$f^T = \mu a^T, \tag{2.5,b}$$

donde (2.5,a) es el vínculo cuadrático asociado a f_0 y f^T en (2.5,b) es la parte transversa de f_i en el mismo espíritu de (1.7). Al sustituir (2.5) en la acción llegamos a

$$S_{TM}^{(red)} = \frac{1}{2} < -2f^L \Delta \dot{a}^T - \Delta a^T \Delta a^T + f^L \Delta f^L + \mu^2 a^T \Delta a^T > . \tag{2.6}$$

En (2.6) no aparece a^L, que representa la componente de a_i sensible a los cambios de calibre. Haciendo las redefiniciones

$$Q \equiv (-\Delta)^{1/2} a^T \tag{2.7,a}$$

$$\pi \equiv (-\Delta)^{1/2} f^L \tag{2.7,b}$$

llegamos a

$$S_{TM}^{(red)} =< \pi \dot{Q} - \frac{1}{2}\pi\pi - \frac{1}{2}Q(\Delta + \mu^2)Q >, \tag{2.8}$$

que es idéntica a (1.11). Observamos que la excitación es masiva, con masa μ y tiene energía definida positiva. El signo de μ no afecta el resultado.

La estructura de (2.6) es explícitamente invariante de calibre. Podemos escoger el calibre[†]

$$a^L = \frac{1}{\mu} f^L, \tag{2.9}$$

y, entonces, la acción (2.6) es idéntica a (1.9). Esta equivalencia entre la acción autodual y la TM fué reportada con anterioridad en el contexto de las acciones reducidas [16] y también en el contexto del formalismo canónico donde se observa que la acción autodual corresponde a la TM con el calibre fijado [36].

[†] Si partimos de (2.6) con el procedimiento canónico, resulta que el vínculo que genera las transformaciones de calibre es $\zeta = \pi^L$ donde π^L es el momento conjugado de a^L.

3.- La acción de Hagen

Otra forma alterna para describir spin 1 con invariancia de calibre constituye la acción propuesta por Hagen [37]

$$S_H =< -\frac{1}{2}f^r f_r + \varepsilon^{rst} f_r \partial_s a_t - \frac{\mu}{2}\varepsilon^{rst} a_r \partial_s a_t - \frac{\lambda}{2\mu}\varepsilon^{rst} f_r \partial_s f_t >, \tag{3.1}$$

donde a_r y f^r son independientes, λ es un parámetro numérico. Observamos que la particularidad que tiene S_H es que se agrega un término,parecido al de CS, construido con el objeto f_r, que puede pensarse como el dual de $F_{mn} = \partial_m a_n - \partial_n a_m$, aunque las ecuaciones de movimiento indican que no es exactamente así

$$- f^r + \varepsilon^{rst}\partial_s a_t - \frac{\lambda}{\mu}\varepsilon^{rst}\partial_s f_t = 0, \tag{3.2,a}$$

$$\varepsilon^{rst}\partial_s f_t - \mu\varepsilon^{rst}\partial_s a_t = 0. \tag{3.2,b}$$

Cuando $\lambda = 0$ f_r es el dual de F_{mn}, pero este es el límite donde $S_H|_{\lambda=0} = S_{TM}$. La acción S_H es invariante bajo las transformaciones de calibre $\delta a_m = \partial_m \xi$, $\delta f_m = 0$. Analizando covariantemente las ecuaciones (3.2), observamos que f_r es transverso. Tomamos el calibre $\partial_r a^r = 0$, ya que la parte longuitudinal de a_r no aparece en las ecuaciones. Así podemos reescribir (3.2) como

$$\begin{aligned} -(P_+ + P_-)_m{}^r f_r + \Box^{1/2}(P_+ - P_-)_m{}^r a_r + \\ - \frac{\lambda}{\Box^{1/2}}\mu(P_+ - P_-)_m{}^r f_r = 0, \end{aligned} \tag{3.3,a}$$

$$\Box^{1/2}(P_+ - P_-)_m{}^r f_r - \mu\Box^{1/2}(P_+ - P_-)_m{}^r a_r = 0. \tag{3.3,b}$$

De estas ecuaciones obtenemos

$$P_{\pm m}{}^r f_r = \pm(1-\lambda)\Box^{1/2} P_{\pm m}{}^r a_r, \tag{3.4}$$

con lo que queda f_r completamente determinado. Volviendo a (3.3,b)

$$\Box^{1/2}[(1-\lambda)({P_{+m}}^r + {P_{-m}}^r)\Box^{1/2} - \mu({P_{+m}}^r - {P_{-m}}^r)]a_r = 0, \tag{3.5}$$

de donde observamos que tenemos una excitación masiva de masa $\mu/(1-\lambda)$ y spin + 1. Además, el signo de $(1-\lambda)$ influye en la determinación de la helicidad que se propaga (aquí estamos suponiendo $1 > \lambda$). Este signo no influye en la positividad de la energía. $\lambda = 1$ constituye un valor singular.

La acción reducida se obtiene análogamente a los dos casos ya presentados. f_0 y a_0 son multiplicadores asociados a los vínculos

$$f^T = \mu a^T, \tag{3.6,a}$$

$$f = (1-\lambda)\Delta a^T, \tag{3.6,b}$$

Al sustituirlos en la acción, ésta queda explícitamente invariante de calibre (no depende de a^L)

$$S_H^{(red)} = \frac{1}{2} < -(1-\lambda)^2 \Delta a^T \Delta a^T + f^L \Delta f^L + +\mu^2 a^T \Delta a^T - 2(1-\lambda) f^L \Delta \dot{a}^T >, \tag{3.7}$$

y definiendo

$$Q = (1-\lambda)(-\Delta)^{1/2} a^T, \tag{3.8,a}$$

$$\pi = (-\Delta)^{1/2} f^L, \tag{3.8,b}$$

llegamos a

$$S_H^{(red)} = < \pi\dot{Q} - \frac{1}{2}\pi\pi - \frac{1}{2}Q(-\Delta + (\frac{\mu}{(1-\lambda)})^2)Q >, \tag{3.9}$$

que es igual a $S_{TM}^{(red)}$ con masa $\mu/(1-\lambda)$.

Si $\lambda \to 1$ en (3.7), tendremos que la acción resultante no aporta ninguna dinámica a los campos. En la acción (3.9) observamos

que la energía es definida positiva. Esto no depende del signo de $\frac{\mu}{(\lambda-1)}$ que sólo determina la helicidad de la excitación. La equivalencia con S_{TM} se observa si en el proceso de reducción cambiamos $\frac{\mu}{(1-\lambda)}$ por μ y $(1-\lambda)a^T$ por a^T. La equivalencia con la autodual es inmediata.

Capítulo **III**

TEORÍAS DE SPIN 2 MASIVO

En dimensiones mayores que tres la teoría que clásicamente se utiliza para describir al gravitón es la acción de Einstein. En el caso de $D = 2 + 1$ no sucede igual que con la acción de Maxwell, ya que la acción de Einstein en $2 + 1$ no tiene grados dinámicos de libertad [40][41][42]. Sin embargo, podemos darle dinámica sumándole distintos términos los cuales además de proporcionarle masa a la teoría se combinan para dar teorías de spin 2 puro.

En este capítulo nos ocuparemos de revisar los modelos de spin 2 masivo (gravedad linealizada masiva) y la equivalencia entre ellos. Todas estas teorías corresponden a la dinámica de un campo tensorial h_{mn} que no es simétrico en m y n, ya que estamos pensando en la linealización del dreibein, $e_m{}^a = \delta_m{}^a + kh_m{}^a$. La conexión con el $h^{(s)}_{mn}$, simétrico, que corresponde a linearizar la métrica, $g_{mn} = \eta_{mn} + kh^{(s)}_{mn}$, es $h^{(s)}_{mn} = h_{mn} + h_{nm}$. Todas las teorías estarán en un fondo (background) plano. Observaremos que hay una estrecha analogía entre las teorías de spin 1 y 2. En esta analogía la teoría TM linealizada no aparece como el análogo a la TM vectorial. A esta última le corresponde la teoría de gravedad masiva vectorial de CS linealizada.

1. Acción de Fierz-Pauli y la teoría de spin 2 autodual

1.1 La acción de Fierz-Pauli y la condición de autodualidad

La manera que usualmente se utiliza para proporcionar masa a la teoría de Einstein linealizada es sumándole el término de Fierz-Pauli. La correspondiente acción es la de Fierz-Pauli (FP)

$$S_{FP} = S_E - \frac{m^2}{2} < h_{pa}h^{ap} - h_p{}^p h_a{}^a >, \tag{1.1}$$

donde S_E es la acción de Einstein linealizada*

$$S_E = -\frac{1}{2} < -2h_{pa}\varepsilon^{pmn}\partial_m \omega_n{}^a + \ \varepsilon^a{}_{bc}\varepsilon^{pmn}\eta_{pa}\omega_m{}^b\omega_n{}^c > . \tag{1.2}$$

Las ecuaciones de movimiento asociadas a S_{FP} son

$$\varepsilon^{pmn}\partial_p h_{ma} + \delta_a{}^n \omega_m{}^m - \omega_a{}^n = 0, \tag{1.3,a}$$

$$\varepsilon^{pmn}\partial_m \omega_n{}^a - m^2(h^{ap} - \eta^{pa}h_l{}^l) = 0. \tag{1.3,b}$$

De (1.3,a) se obtiene la expresión de $\omega_m{}^a$ en función de $h_m{}^a$

$$\omega_m{}^a = -\frac{1}{2}\delta_m{}^a\varepsilon^{pls}\partial_p h_{ls} + \varepsilon^{apl}\partial_p h_{lm}, \tag{1.4}$$

que al sustituir en (1.3,b) nos da el sistema de ecuaciones para h_{mn}

$$[(\varepsilon^{pmb}\varepsilon^{rsa} - \frac{1}{2}\varepsilon^{pma}\varepsilon^{rsb})\partial_m\partial_r - m^2(\eta^{sa}\eta^{pb} - \eta^{pa}\eta^{sb})]h_{sb} = 0. \tag{1.5}$$

Esto puede reescribirse como

$$[-\frac{1}{2}(\varepsilon^{pms}\varepsilon^{arb} + \varepsilon^{pmb}\varepsilon^{ars})\partial_m\partial_r - m^2(\eta^{sa}\eta^{pb} - \eta^{pa}\eta^{sb})]h_{sb} = 0, \tag{1.6}$$

donde, notamos que, el primer término es simétrico en p y a, y además sólo contribuye la parte simétrica de h_{sb}. Esto debe ser así, ya que este término representa al tensor de Einstein linealizado.

*Ver apéndice A

Utilizando los proyectores de las distintas partes irreducibles de h_{sb} †, escribimos la ecuación (1.6) como

$$[(\Box - m^2)(P_S^2 - P_S^0) - m^2(P_S^1 - P_E^1 - P_B^0 - \sqrt{2}P_{SW}^0 - \sqrt{2}P_{WS}^0)]h = 0, \quad (1.7)$$

donde Ph, en cada caso, se sobreentiende que significa $P_{mn}{}^{ls}h_{ls}$.

Aplicando P_S^1, P_E^1, P_B^0 y P_{SW}^0, sobre (1.7), obtenemos que

$$P_S^1 h = P_E^1 h = P_S^0 h = P_B^0 h = 0. \quad (1.8)$$

De (1.8) tenemos que $P_{WS}^0 h = 0$, lo que utilizamos al aplicar P_{WS}^0 sobre (1.7), y nos dice que

$$P_W^0 h = 0. \quad (1.9)$$

Nos queda, entonces, que la propagación es de spin 2 puro con masa m

$$(\Box - m^2)P_S^2 h = 0, \quad (1.10)$$

y, ya que $P_S^2 = P_{+S}^2 + P_{-S}^2$ tendremos que las 2 helicidades $+2$ y -2 se propagan en la teoría de Fierz-Pauli. Corroboramos, entonces, el hecho de que para tener una teoría que conserve P y T debemos tener las dos helicidades presentes con igual masa.

La ecuación (1.10) es la condición que cumple la parte transversa, simétrica y sin traza, h_{mn}^{Tt}, de h_{mn} (i.e. $h_{mn}^{Tt} = h_{nm}^{Tt}$, $\partial^m h_{mn}^{Tt} = \eta^{mn}h_{mn}^{Tt} = 0$). Esta ecuación puede factorizarse como en el caso de la acción de Proca

$$(\Box - m^2)P_S^2 h = [\Box^{1/2}(P_{+S}^2 - P_{-S}^2) - mP_S^2][-\Box^{1/2}(P_{+S}^2 - P_{-S}^2) - mP_S^2]h, \quad (1.11)$$

y cuando h_{mn}^{Tt} cumple una ecuación homogénea con alguno de estos factores, decimos que verifica la condición de autodualidad

† Ver apéndice B

$$[\pm\Box^{1/2}(P^2_{+S} - P^2_{-S}) - mP^2_S]h = 0. \tag{1.12}$$

Para el caso de spin 1 el problema era mas sencillo, y afirmabamos que la condición de autodualidad constituía la "raíz" de la ecuación de Proca. Aquí vemos que en todo caso es la "raíz" de la ecuación de Fierz-Pauli sobre la parte transversa, simétrica y sin traza.

1.2 La acción autodual

La acción que conduce a la condición (1.12) para h^{Tt}_{mn} y que además describe una excitación masiva de spin 2 puro es la correspondiente a la teoría de spin 2 autodual [17,18,31]

$$S^2_{AD} = \frac{m}{2} < h_{pa}\varepsilon^{prs}\partial_r h_s{}^a - m(h_{pa}h^{ap} - h_p{}^p h_a{}^a) > . \tag{1.13}$$

En (1.13), el signo de m, como veremos, determina la helicidad de la excitación. El primer término de S_{AD} se obtiene al linearizar el término de CS triádico [43] (TCS) que presentaremos en el capítulo siguiente, y el segundo término es el de Fierz-Pauli usual.

Las ecuaciones de movimiento que surgen al hacer variaciones en S_{AD} son

$$\varepsilon^{prs}\partial_r h_s{}^a - m(h^{ap} - \eta^{pa}h_l{}^l) = 0. \tag{1.14}$$

En función de proyectores el término TCS linealizado se escribe como

$$\begin{aligned} h_{pa}\varepsilon^{prs}\partial_r h_s{}^a =& h_{pa}\Box^{1/2}[P^2_{+S} - P^2_{-S} - P^0_{BS} - P^0_{SB} + \\ &+ \frac{1}{2}(P^1_{+S} - P^1_{-S} + P^1_{+E} - P^1_{-E}) + \\ &+ \frac{1}{2}(P^1_{+SE} - P^1_{-SE} + P^1_{+ES} - P^1_{-ES})]^{pa,sb}h_{sb}, \end{aligned} \tag{1.15}$$

y el de FP como

$$(h_{pa}h^{ap}-h_p{}^p h_l{}^l)=[P^2_S+P^1_S-P^1_E-P^0_S-P^0_B-\sqrt{2}(P^0_{SW}+P^0_{WS})]^{pa,sb}h_{sb}. \quad (1.16)$$

Así, la ecuación (1.14) puede escribirse en términos de proyectores como

$$\begin{aligned}&[(\Box^{1/2}-m)P^2_{+S}-(\Box^{1/2}+m)P^2_{-S}+\frac{1}{2}(\Box^{1/2}-2m)(P^1_{+S}-P^1_{-E})\\&+\frac{1}{2}(\Box^{1/2}+2m)(P^1_{+E}-P^1_{-S})+\frac{\Box^{1/2}}{2}(P^1_{+SE}+P^1_{+ES}-P^1_{-SE}-P^1_{-ES})\\&-\Box^{1/2}(P^0_{BS}+P^0_{SB})+m(P^0_S+P^0_B+\sqrt{2}(P^0_{WS}+P^0_{SW})]h=0. \qquad (1.17)\end{aligned}$$

Aplicamos $P^1_{\pm S}$ y $P^1_{\pm SE}$ a (1.17) y obtenemos

$$(\pm\frac{1}{2}(\Box^{1/2}\mp 2m)P^1_{\pm S}\pm\frac{\Box^{1/2}}{2}P^1_{\pm SE})h=0, \qquad (1.18,\text{a})$$

$$(\pm\frac{1}{2}(\Box^{1/2}\pm 2m)P^1_{\pm SE}\pm\frac{\Box^{1/2}}{2}P^1_{\pm S})h=0, \qquad (1.18,\text{b})$$

que al restarlas, nos dice que $(P^1_{\pm S}+P^1_{\pm SE})h=0$. Si sustituimos esto en (1.18,a) tendremos que

$$P^1_{\pm S}h=0. \qquad (1.19)$$

Hacemos un procedimiento análogo aplicando $P^1_{\pm E}$ y $P^1_{\pm ES}$ sobre (1.17) y llegaremos a

$$P^1_{\pm E}h=0, \qquad (1.20)$$

con lo que aseguramos que no hay propagación de las partes de spin 1. Aplicamos ahora P^0_W, P^0_{SB}, P^0_S sobre (1.17), obteniendo respectivamente

$$\sqrt{2}mP^0_{WS}h=0, \qquad (1.21,\text{a})$$

$$(mP^0_{SB}-\Box^{1/2}P^0_S)h=0, \qquad (1.21,\text{b})$$

$$[m(P^0_S+\sqrt{2}P^0_{SW})-\Box^{1/2}P^0_{SB}]h=0. \qquad (1.21,\text{c})$$

De (1.21,a) (con P^0_{SW}) es inmediato ver que $P^0_S h = 0$. Siguiendo con (1.21,b) tendremos que $P^0_B h = 0$. Por último con (1.21,c) concluimos que

$$P^0_W h = P^0_B h = P^0_S h = 0. \tag{1.22}$$

Tenemos, entonces, que el sistema (1.17) es equivalente a

$$[(\Box^{1/2} - m)P^2_{+S} - (\Box^{1/2} + m)P^2_{-S}]h = 0, \tag{1.23}$$

que es justamente la condición de autodualidad para h^{Tt}_{mn}. Además (1.23) muestra que la excitación física de masa m corresponde a la parte de helicidad +2. Si cambiamos m por $-m$, se propagará la parte de helicidad -2. Concluimos que la helicidad de la excitación es $2m/|m|$, análogo al caso de spin 1. La positividad de la energía puede verse si hacemos la decomposición 2+1 de S^2_{AD} y obtenemos la acción reducida [18]. No presentamos esto aquí ya que en la siguiente subsección hacemos el análisis canónico de S^2_{AD} que nos servirá para estudiar su equivalencia con la acción linealizada de la gravedad masiva vectorial de Chern-Simons (VCS).

1.3 Análisis canónico de la teoría de spin 2 autodual

Pasamos, ahora, al análisis canónico de la teoría autodual. Esto será utilizado para mostrar la equivalencia entre esta teoría y la intermedia [44] que será presentada en la sección 3. Hacemos, entonces, la decomposición 2+1 de S^2_{AD} llegando a la expresión (i, j, k y $l = 1, 2$)

$$\begin{aligned} S^2_{AD} = \frac{m}{2} <& - 2h_{00}(\varepsilon_{ij}\partial_i h_{j0} + m h_{ii}) + 2h_{0k}(\varepsilon_{ij}\partial_i h_{jk} + m h_{k0}) + \\ & - h_{ik}\varepsilon_{ij}\dot{h}_{jk} + h_{i0}\varepsilon_{ij}\dot{h}_{j0} + m(h_{ii}h_{jj} - h_{ij}h_{ji}) > . \end{aligned} \tag{1.24}$$

Ahora hacemos las redefiniciones

$$n = h_{00}, \tag{1.25,a}$$
$$N_i = h_{i0}, \tag{1.25,b}$$
$$M_i = h_{0i}, \tag{1.25,c}$$
$$H_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji}), \tag{1.25,d}$$
$$V = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij} h_{ij}, \tag{1.25,e}$$

donde hemos distinguido las partes simétrica antisimétrica de h_{ij}. S^2_{AD} toma la forma

$$\begin{aligned} S^{(2)}_{AD} = \frac{m}{2} < &- 2n(\varepsilon_{ij}\partial_i N_j + H_{ii}) + 2M_k(\varepsilon_{ij}\partial_i H_{jk} + mN_k - \partial_k V) + \\ &- m(H_{ij}H_{ij} - H_{ii}H_{jj}) - 2\dot{H}_{ij}[\delta_{ij}V - \frac{1}{4}(\varepsilon_{ik}H_{kj} + \varepsilon_{jk}H_{ki})] \\ &- \dot{N}_i\varepsilon_{ij}N_j - 2mVV > . \end{aligned} \tag{1.26}$$

n y M_k son multiplicadores asociados a los vínculos

$$\psi \equiv \varepsilon_{ij}\partial_i N_j + mH_{ii}, \tag{1.27,a}$$
$$\psi_k \equiv \varepsilon_{ij}\partial_i H_{jk} + mN_k - \partial_k V. \tag{1.27,b}$$

Debido a que $S^{2,l}_{AD}$ es de primer orden, la definición de los momentos conjugados, asociados a las variables dinámicas, no permite despejar ninguna de las velocidades. Así que tenemos los vínculos primarios

$$\varphi \equiv \pi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{V}} = \pi, \tag{1.28,a}$$
$$\varphi_i = \pi_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}_i} = \pi_i + \frac{m}{2}\varepsilon_{ij}N_j, \tag{1.28,b}$$
$$\varphi_{ij} = \pi_{ij} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{H}_{ij}} = \pi_{ij} + m\delta_{ij}V - \frac{m}{4}(\varepsilon_{ik}H_{kj} + \varepsilon_{jk}H_{ki}). \tag{1.28,c}$$

La densidad hamiltoniana sobre los vínculos es

$$\mathcal{H}_0 = \frac{m^2}{2}(H_{ij}H_{ij} - H_{ii}H_{jj} + VV), \tag{1.29,a}$$

así, definimos el hamiltoniano canónico $H_c = \int dx^2 \mathcal{H}_c$, con

$$\mathcal{H}_c = \mathcal{H}_0 + \mu n\psi - \mu M_i \psi_i + \lambda\varphi + \lambda_i\varphi_i + \lambda_{ij}\varphi_{ij}. \tag{1.30}$$

Definimos los corchetes de Poisson a tiempos iguales entre las variables y sus momentos conjugados

$$\{V(x), \pi(y)\} \equiv \delta^{(2)}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}), \tag{1.31,a}$$

$$\{N_i(x), \pi_j(y)\} \equiv \delta_{ij}\delta^{(2)}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}), \tag{1.31,b}$$

$$\{H_{ij}(x), \pi_{kl}(y)\} \equiv \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\delta^{(2)}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}), \tag{1.31,c}$$

donde se sobreentiende que $x^p = (t, \overrightarrow{x})$ y $y^p = (t, \overrightarrow{y})$. Podemos, así, obtener los vínculos primarios

$$\{\Omega_A(x), \Omega_B(y)\} = M_{AB}(x)\delta^{(2)}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}), \tag{1.32,a}$$

donde

$$\Omega_A(x) = (\psi(x), \psi_i(x), \varphi(x), \varphi_i(x), \varphi_{ij}(x)), \tag{1.32,b}$$

$$\Omega_B(y) = (\psi(y), \psi_k(y), \varphi(y), \varphi_k(y), \varphi_{kl}(x)). \tag{1.32,c}$$

$M_{AB}(x)$ tiene la forma

$$M_{AB}(x) = \begin{pmatrix} M_1^{(3\times3)} & M_3^{(3\times2)} \\ M_2^{(2\times3)} & M_4^{(2\times2)} \end{pmatrix}, \tag{1.33,a}$$

con

$$M_1^{(3\times3)}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_i \\ 0 & -\partial_k & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.33,b}$$

$$M_2^{(2\times3)}(x) = \begin{pmatrix} -\varepsilon_{im}\partial_m & -m\delta_{ik} & 0 \\ -m\delta_{ij} & -\frac{1}{2}(\delta_{ik}\varepsilon_{jm}\partial_m + \delta_{jk}\varepsilon_{im}\partial_m) & m\delta_{ij} \end{pmatrix}, \tag{1.33,c}$$

$$M_3^{(3\times2)}(x) = \begin{pmatrix} -\varepsilon_{km}\partial_m & m\delta_{kl} \\ m\partial_{ik} & -\frac{1}{2}(\delta_{il}\varepsilon_{km}\partial_m + \delta_{ik}\varepsilon_{lm}\partial_m) \\ 0 & -m\delta_{kl} \end{pmatrix}, \tag{1.33,d}$$

$$M_4^{(2\times2)}(x) = \begin{pmatrix} m\varepsilon_{ik} & 0 \\ 0 & -\frac{m}{4}(\varepsilon_{ik}\delta_{jl} + \varepsilon_{il}\delta_{jk} + \varepsilon_{jk}\delta_{il} + \varepsilon_{jl}\delta_{ik}) \end{pmatrix}. \tag{1.33,e}$$

Miramos la conservación de los vínculos

$$\dot{\psi} = \varepsilon_{ij}\partial_i\lambda_j + m\lambda_{ii}, \tag{1.34,a}$$

$$\dot{\psi}_i = -\partial_i\lambda + m\lambda_i + \varepsilon_{kl}\partial_k\lambda_{li}, \tag{1.34,b}$$

$$\dot{\varphi} = -2m^2V + m(\partial_iM_i - \lambda_{ii}), \tag{1.34,c}$$

$$\dot{\varphi}_i = m^2M_i + m\varepsilon_{ik}\lambda_k - m\varepsilon_{ij}\partial_jn, \tag{1.34,d}$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= m^2\delta_{ij}(H_{kk} - n) - m^2H_{ij} + \lambda m\delta_{ij} + \frac{m}{2}(\varepsilon_{jm}\partial_mM_i + \varepsilon_{im}\partial_mM_j) + \\ &\quad - \frac{m}{2}(\varepsilon_{ik}\lambda_{kj} + \varepsilon_{jk}\lambda_{ki}), \end{aligned} \tag{1.34,e}$$

donde pareciera que no hay vínculos adicionales. Sin embargo, si hacemos la combinación

$$\theta = \varphi + \psi - \frac{1}{m}\partial_i\varphi_i, \tag{1.35}$$

resulta que $\dot{\theta} = -2m^2V$. θ conmuta con todos los vínculos primarios y, por tanto, surge el vínculo secundario

$$\widetilde{\theta} = V. \tag{1.36}$$

La conservación de $\widetilde{\theta}$ no proporciona ningún vínculo adicional. La consistencia $\dot{\widetilde{\theta}} = 0$ implica que $\lambda = 0$. Así que podemos eliminar a V y π de la teoría.

Tomamos a θ por ψ. El sistema, finalmente, estará descrito por

$$\mathcal{H}_0 = \frac{m^2}{2}(H_{ij}H_{ij} - H_{ii}H_{jj}), \tag{1.37,a}$$

sometido a los vínculos

$$\theta = -\frac{1}{m}\partial_i\pi_i + mH_{ii} + \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i N_j, \tag{1.37,b}$$

$$\varphi_i = \pi_i + \frac{m}{2}\varepsilon_{ij}N_j, \tag{1.37,c}$$

$$\psi_i = \varepsilon_{kl}\partial_k H_{li} - mN_i, \tag{1.37,d}$$

$$\varphi_{ij} = \pi_{ij} - \frac{m}{4}(\varepsilon_{ik}H_{kj} + \varepsilon_{jk}H_{ki}), \tag{1.37,e}$$

donde ya hemos eliminado a π y V. El conteo de grados de libertad nos da correcto: 10 variables $(N_i, \pi_i, H_{ij}, \pi_{ij})$ sometidas a 8 vínculos $(\theta, \varphi_i, \psi_i, \varphi_{ij})$ quedando 2 grados de libertad correspondientes a la única variable dinámica, mas su momento conjugado.

2. La acción de gravedad Topológica Masiva, linealizada

La ación de gravedad TM linealizada es

$$S^{2,l}_{TM} = \frac{1}{4\mu} < -\varepsilon^{lmr}\partial_l h^{(s)}_{mp} G^{pa}(h^{(s)})\eta_{ra} + \mu h^{(s)}_{pa} G^{pa}(h^{(s)}) >, \tag{2.1}$$

donde el tensor de Einstein linealizado*

$$G^{pa}(h^{(s)}) = -\frac{1}{2}\varepsilon^{prs}\varepsilon^{alp}\partial_r\partial_l h^{(s)}_{sb}, \tag{2.2}$$

ha sido escrito en forma conveniente para los cálculos. Observamos que el signo del término correspondiente a la acción de Einstein es contrario al que tendría en la acción S_E (ver 1.2) si sustituyeramos (1.4). $S^{2,l}_{TM}$ es invariante bajo las transformaciones de calibre

$$\delta h_s{}^b = \partial_s \xi^b \quad ; \quad \delta h^{(s)}_{pm} = \partial_p \xi_m + \partial_m \xi_p. \tag{2.3}$$

* Ver apéndice A

Reescribimos, ahora, $S^{2,l}_{TM}$ en función de los proyectores de las distintas partes de ${h_s}^b$

$$S^{2,l}_{TM} = \frac{1}{8\mu} < h^{(s)}\Box \;\; \Box^{1/2}(P^2_{+S} - P^2_{-S})h^{(s)} - \mu h^{(s)}\Box(P^2_S - P^0_S)h^{(s)} > . \quad (2.4,a)$$

Así, las ecuaciones de movimiento de esta acción son

$$\frac{1}{\mu}[\Box \;\; \Box^{1/2}(P^2_{+S} - P^2_{-S})h^{(s)} - \mu\Box(P^2_S - P^0_S)h^{(s)}] = 0. \quad (2.4,b)$$

Observamos que de (2.4,b) $P^0_W h^{(s)} = P^1_S h^{(s)} = 0$ y

$$\Box P^0_S h^{(s)} = 0, \quad (2.5,a)$$

$$\frac{1}{\mu}\Box(\Box^{1/2} - \mu)P^2_{+S}h^{(s)} = 0, \quad (2.5,b)$$

$$-\frac{1}{\mu}\Box(\Box^{1/2} + \mu)P^2_{-S}h^{(s)} = 0, \quad (2.5,c)$$

de donde no podemos concluir, inmediatamente, que no hayan excitaciones de masa cero.

En el calibre armónico

$$\partial_m h^{mn} = 0, \quad (2.6)$$

i.e. $h^{(s)} = (P^2_S + P^0_S)h^{(s)}$, el inverso del operador diferencial de las ecuaciones de movimiento es

$$\triangle = -\frac{1}{\Box}(P^0_S + \frac{\mu}{\Box^{1/2} - \mu}P^2_{+S} - \frac{\mu}{\Box^{1/2} + \mu}P^2_{-S}), \quad (2.7)$$

donde $\triangle[\Box^{3/2}(P^2_{+S} - P^2_{-S}) - \mu\Box(P^2_S - P^0_S)] = -\mu(P^2_S + P^0_S)$. Podemos reescribir $\triangle$ como

$$\triangle = \frac{1}{\Box}(P^2_S - P^0_S) - \frac{1}{\Box^{1/2}}(\frac{1}{\Box^{1/2} - \mu}P^2_{+S} + \frac{1}{\Box^{1/2} + \mu}P^2_{-S}). \quad (2.8)$$

Los proyectores $P^2_{\pm S}$ pueden escribirse, convenientemente, como

$$
\begin{aligned}
P^2_{\pm S mn}{}^{ls} &= \frac{1}{2}[P^2_{S mn}{}^{ls} \pm \frac{1}{4}(P_m{}^l \xi_m{}^s + P_n{}^l \xi_m{}^s + P_m{}^s \xi_m{}^l + P_n{}^s \xi_m{}^l)] \\
&\equiv \frac{1}{2}[P^2_S \pm \frac{1}{4}\text{“}P\xi\text{”}],
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

de esta forma llegamos a la forma final de $\triangle$

$$
\triangle = \frac{1}{\Box}(P^2_S - P^0_S) - \frac{1}{\Box - \mu^2}P^2_S - \frac{1}{4(\Box - \mu^2)}\frac{\mu}{\Box^{1/2}}\text{“}P\xi\text{”}. \tag{2.10}
$$

En componentes

$$
\begin{aligned}
\triangle_{mn}{}^{ls} =& \frac{1}{2\Box}(P_m{}^l P_n{}^s + P_m{}^s P_n{}^l - 2P_{mn}P^{ls}) + \\
&- \frac{1}{2(\Box - \mu^2)}(P_m{}^l P_n{}^s + P_m{}^s P_n{}^l - P_{mn}P^{ls}) + \\
&- \frac{\mu}{4(\Box - \mu^2)\Box}(P_m{}^l \varepsilon_n{}^{rs} + P_n{}^l \varepsilon_m{}^{rs} + P_m{}^s \varepsilon_n{}^{rl} + P_n{}^s \varepsilon_m{}^{rl})\partial_r,
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

donde el primer término es justamente el propagador de Einstein con el signo opuesto [40]. Cuando acoplamos con una fuente externa conservada (i.e. T^{mn} con $\partial_m T^{mn} = 0$), al despejar $h^{(s)}_{mn}$ en función de T^{mn} y sustituirlo en la acción, la contribución de este término es $\sim < T^{mn}\frac{1}{\Box}T_{mn} - T^m{}_m\frac{1}{\Box}T^n{}_n >$. Esta contribución es de contacto. Esto puede verse si descomponemos T^{mn} en sus componentes independientes $T^{00}, T^{0i} = \varepsilon_{ij}\partial_j T^T + \partial_i((-\Delta)^{-1}\dot{T}^{00})$ y $T^{ij} = (\delta_{ij}\Delta - \partial_i\partial_j)T + \partial_i\partial_j(-\Delta)^{-2}\ddot{T}^{00} + (\varepsilon_{ik}\partial_k\partial_j + \varepsilon_{jk}\partial_k\partial_i)(-\Delta)\dot{T}^T$, en cuyo caso

$$
< T^{mn}\frac{1}{\Box}T_{mn} - T^m{}_m\frac{1}{\Box}T^n{}_n > \sim < T^T T^T + T^{00}T > . \tag{2.12}
$$

Vemos, ahora, que no hay polos de masa cero en el propagador. El signo de la acción de Einstein cobra relevancia cuando miramos la positividad de la energía.

Hacemos la descomposición 2+1 de $S^{2,l}_{TM}$, empezando con (2.1) en función de $h^{(s)}_{mn}$ es explicitamente así

$$S^{2,l}_{TM} = -\frac{1}{8\mu} < (\Box h^{(s)n}{}_p - \partial_t \partial^n h^{(s)t}{}_p)\varepsilon^{psq}\partial_s h^{(s)}_{qn} + \\ + \mu \partial_m h^{(s)}_{pa} \varepsilon^{mpr} \varepsilon^{als} \partial_l h^{(s)}_{sr} > . \qquad (2.13)$$

En un primer paso llegamos a

$$\begin{aligned} S^{2,l}_{TM} = -\frac{1}{8\mu} <& 2\varepsilon_{ij}\partial_i h^{(s)}_{j0}\partial_k \dot{h}^{(s)}_{k0} + \Delta h^{(s)}_{0i}\varepsilon_{ij} h^{(s)}_{j0} - \Delta h^{(s)}_{ik}\varepsilon_{ij}\dot{h}^{(s)}_{jk} + \\ & - \partial_l h^{(s)}_{li}\varepsilon_{ij}\partial_k h^{(s)}_{kj} - 2\partial_k \dot{h}^{(s)}_{ki}\varepsilon_{ij}\dot{h}^{(s)}_{j0} - \mu \dot{h}^{(s)}_{ii} h^{(s)}_{jj} + \\ & + 2\varepsilon_{ij}\partial_i \dot{h}^{(s)}_{jk}\dot{h}^{(s)}_{k0} + \varepsilon_{ij}\partial_i h^{(s)}_{jk}\partial_k \dot{h}^{(s)}_{00} + \mu \dot{h}^{(s)}_{ij}\dot{h}^{(s)}_{ij} + \\ & + 4\mu \dot{h}^{(s)}_{i0}(\partial_i h^{(s)}_{jj} - \partial_j h^{(s)}_{ij}) + \ddot{h}^{(s)}_{ik}\varepsilon_{ij}\dot{h}^{(s)}_{jk} + \\ & + 2\varepsilon_{ij}\partial_i h^{(s)}_{jk}(\Delta h^{(s)}_{k0} - \partial_k \partial_l h^{(s)}_{l0}) - 2\mu h^{(s)}_{i0}\Delta h^{(s)}_{i0} + \\ & + 2\mu h_{00}[\Delta h^{(s)}_{ii} - \partial_i \partial_j h^{(s)}_{ij} - \frac{\Delta}{\mu}\varepsilon_{ij}\partial_i h^{(s)}_{j0}] + \\ & - 2\mu \partial_i h^{(s)}_{i0}\partial^n_j h^{(s)}_{j0} > . \end{aligned} \qquad (2.14)$$

Hacemos la descomposición

$$h^{(s)}_{00} = 2n, \qquad (2.15,a)$$
$$h^{(s)}_{0i} = 2\varepsilon_{ij}\partial_j n^T + 2\partial_i n^L, \qquad (2.15,b)$$
$$h^{(s)}_{ij} = 2(\delta_{ij}\Delta - \partial_i\partial_j)h^T + 2\partial_i\partial_j h^L + 2(\varepsilon_{ij}\partial_k\partial_j + \varepsilon_{jk}\partial_k\partial_i)h^{TL}, \qquad (2.15,c)$$

donde los factores de 2 surgen al aplicar la equivalencia entre $h^{(s)}_{mn}$ y h_{mn} no simétrico, cuya parte antisimétrica (de la forma $\sim \varepsilon_{mnl}V^l$) no aparece en (2.15). Las componentes de $h^{(s)}_{mn}$ ante transformaciones de calibre, con parámetros $\xi_m \quad (\xi_0 = \xi, \xi_i = \varepsilon_{ij}\partial_j\xi^T + \partial_i\xi^L)$, cambian como

$$\delta h^T = 0 \quad , \quad \delta h^{TL} = \frac{1}{2}\xi^T \quad , \quad \delta h^L = \xi^L,$$
$$\delta n = \dot{\xi} \quad , \quad \delta n^T = \frac{1}{2}\dot{\xi}^T \quad , \quad \delta n^L = \frac{1}{2}(\xi + \dot{\xi}^L), \qquad (2.16)$$

donde observamos que h^T es la única componente de $h_{mn}^{(s)}$ invariante de calibre. Sin embargo, algunas combinaciones de ellas podrían, también, ser invariantes.

$S_{TM}^{2,l}$ en función de las distintas componentes de $h_{mn}^{(s)}$ queda como

$$\begin{aligned} S_{TM}^{2,l} = -\frac{1}{\mu} < \Delta n[\mu\Delta h^T + \Delta(n^T - \dot{h}^{TL})] + \\ + \mu\Delta(n^T - \dot{h}^{TL})\Delta(n^T - \dot{h}^{TL}) + \\ - 2\Delta\dot{n}^L\Delta(n^T - \dot{h}^{TL}) + \Delta^2 h^{TL}\Delta(n^T - \dot{h}^{TL}) + \\ - 2\mu\Delta\dot{n}^L\Delta h^T - \Delta\ddot{h}^T\Delta(n^T - \dot{h}^{TL}) + \\ + \Delta\ddot{h}^L\Delta(n^T - \dot{h}^{TL}) - \mu\Delta\dot{h}^{TL}\Delta\dot{h}^L >, \end{aligned} \tag{2.17}$$

donde hemos destacado la combinación invariante de calibre $n^T - \dot{h}^{TL}$. Hacemos la sustitución

$$N = n^T - \dot{h}^{TL}, \tag{2.18}$$

que es equivalente a hacer una fijación, parcial, de calibre, ya que correspondería a tomar $h^{TL} = 0$. De esta forma n aparece como un multiplicador de Lagrange asociado al vínculo

$$\mu\Delta h^T + \Delta N = 0, \tag{2.19}$$

que permite despejar N en función de h^T. El rol de n, como multiplicador, esta acorde con la forma como transforma bajo cambios de calibre. Luego de sustituir (2.18) y (2.19) en (2.17) llegamos a la forma reducida final de $S_{TM}^{2,l}$

$$S_{TM}^{2,l(red)} =< \Delta\dot{h}^T\Delta\dot{h}^T + \Delta h^T(\Delta - \mu^2)\Delta h^T >, \tag{2.20}$$

donde no aparecen h^L y n^L. Estos pueden fijarse con el calibre residual que tenemos. En (2.20) observamos que esta acción corresponde a la de un sólo grado dinámico de libertad con masa μ y

energía definida positiva. Este resultado no depende del signo de μ en (2.1) y sí del signo de la acción de Einstein, ya que cambiarle el signo a S_E equivale a multiplicar $S^{2,l}_{TM}$ por -1 y cambiar μ por $-\mu$.

3. La acción intermedia, o la gravedad masiva Vectorial de Chern-Simons linealizada

3.1 Análisis covariante

Una manera alterna de describir una teoría de spin 2 masivo, se logra con la acción intermedia [17,18]

$$S^l_{VCS} = \frac{1}{2} < 2h_{pa}\varepsilon^{pmn}\partial_m\omega_n{}^a - \varepsilon^a{}_{bc}\varepsilon^{pmn}\eta_{pa}\omega_m{}^b\omega_n{}^c - \mu h_{pa}\varepsilon^{prs}\partial_r h_s{}^a >, \quad (3.1)$$

donde el subíndice VCS proviene del hecho que es la linealización de la teoría curva llamada gravedad masiva vectorial de Chern-Simons, introducida posteriormante [43] a la presentación de la acción intermedia [17,18]. Esta acción de spin 2 masivo fué considerada inicialmente como una acción "intermedia" entre la acción "maestra" de tercer orden que es equivalente a S^2_{AD} y $S^{2,l}_{TM}$ [18].

S^l_{VCS} es invariante bajo las transformaciones de calibre

$$\delta h_{mn} = \partial_m \xi_n, \quad (3.2)$$

al igual que la acción TM linealizada.

Las ecuaciones de movimiento de S^l_{VCS} son

$$\varepsilon^{pmn}\partial_m\omega_n{}^a - \mu\varepsilon^{prs}\partial_r h_s{}^a = 0, \quad (3.3,a)$$

$$\varepsilon^{pmn}\partial_m h_n{}^a - \omega^{ap} + \eta^{ap}\omega_l{}^l = 0, \quad (3.3,b)$$

donde (3.3,b) al igual que (1.3,a) permite despejar $\omega_p{}^a$ en función de $h_p{}^a$. Con esto conseguimos el sistema de segundo orden, que satisface $h_p{}^a$

$$(\frac{1}{2}\varepsilon^{pma}\varepsilon^{srb}-\varepsilon^{pmb}\varepsilon^{sra})\partial_m\partial_r h_{sb}-\mu\varepsilon^{pmn}\partial_m h_n{}^a=0. \tag{3.4}$$

Podemos ver cual es el espectro físico de la teoría si escribimos (3.4) en función de los proyectores de las distintas partes de h_n^b

$$\begin{aligned}&[\Box(P_S^2-P_S^0)-\mu\Box^{1/2}(P_{+S}^2-P_{-S}^2-P_{BS}^0-P_{SB}^0)+\\&-\frac{\mu}{2}\Box^{1/2}(P_{+S}^1-P_{-S}^1+P_{+SE}^1-P_{-SE}^1+P_{+E}^1+\\&\qquad -P_{-E}^1+P_{+ES}^1-P_{-ES}^1)]h=0,\end{aligned} \tag{3.5}$$

y escogemos el calibre armónico $\partial_m h^{mn}=0$ que es equivalente a*

$$\begin{aligned}h^T&=Th\\&=[P_S^2+P_S^0+P_B^0+\frac{1}{2}(P_{SE}^1+P_{ES}^1+P_S^1+P_E^1)]h,\end{aligned} \tag{3.6,a}$$

o

$$[P_W^0+\frac{1}{2}(P_S^1+P_E^1-P_{SE}^1-P_{ES}^1)]h=0. \tag{3.6,b}$$

Es inmediato notar que $P_S^0\widetilde{h}=P_B^0\widetilde{h}=P_S^1\widetilde{h}=P_E^1\widetilde{h}=0$, donde $\widetilde{h}=\Box^{1/2}h$, y que

$$(\Box^{1/2}\mp\mu)P_{\pm S}^2\widetilde{h}=0, \tag{3.7}$$

donde se muestra que $\widetilde{h}$ representa una excitación masiva de masa μ y helicidad +2. Si cambiamos μ por $-\mu$ la helicidad será -2. Así S_{VCS}^l describe una excitación masiva de helicidad $2\mu/|\mu|$.

3.2 Descomposición 2+1 y la forma invariante de calibre S_{VCS}^l

Verifiquemos lo heurísticamente encontrado haciendo la descomposición 2+1 de S_{VCS}^l. En un primer paso tendremos

*Ver apéndice B

$$
\begin{aligned}
S^l_{VCS} = \frac{1}{2} < &- 2h_{00}[\varepsilon_{ij}\partial_i\omega_{j0} - \mu\varepsilon_{ij}\partial_i h_{j0}] + \\
&- 2\omega_{00}[\omega_{ii} + \varepsilon_{ij}\partial_i h_{j0}] \\
&+ h_{0k}[\varepsilon_{ij}\partial_i\omega_{jk} - \mu\varepsilon_{ij}\partial_i h_{jk}] + \\
&+ 2\omega_{0k}[\omega_{k0} + \varepsilon_{ij}\partial_i h_{jk}] + 2h_{i0}\varepsilon_{ij}\dot{\omega}_{j0} + \\
&- \mu h_{i0}\varepsilon_{ij}\dot{h}_{j0} - 2h_{ik}\varepsilon_{ij}\dot{\omega}_{jk} + \mu h_{ik}\varepsilon_{ij}h_{jk} + \\
&+ \omega_{ii}\omega_{jj} - \omega_{ij}\omega_{ji} >,
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

donde hemos partido de la expresión de primer orden, pues, facilita el proceso de reducción. Observamos que h_{00}, h_{0k} son multiplicadores de Lagrange (lo que es de esperarse, pues bajo cambios de calibre transforman como $\delta h_{00} = \dot{\xi}_0$, $\delta h_{0k} = \dot{\xi}_k$); así como ω_{00} y ω_{0k}.

Hacemos la descomposición para

$$h_{00} = n, \tag{3.9,a}$$

$$h_{i0} = \varepsilon_{ij}\partial_j(n^T + v^L) + \partial_i(n^L - v^T), \tag{3.9,b}$$

$$h_{0i} = \varepsilon_{ij}\partial_j(n^T - v^L) + \partial_i(n^L + v^T), \tag{3.9,c}$$

$$
\begin{aligned}
h_{ij} = &(\delta_{ij}\Delta - \partial_i\partial_j)h^T + \partial_i\partial_j h^L + \\
&+ (\varepsilon_{ik}\partial_k\partial_j + \varepsilon_{jk}\partial_k\partial_i)h^{TL} + \varepsilon_{ij}V,
\end{aligned} \tag{3.9,d}
$$

$$\omega_{00} = \gamma, \tag{3.9,e}$$

$$\omega_{i0} = \varepsilon_{ij}\partial_j(\gamma^T + \lambda^L) + \partial_i(\gamma^L - \lambda^T), \tag{3.9,f}$$

$$\omega_{0i} = \varepsilon_{ij}\partial_j(\gamma^T - \lambda^L) + \partial_i(\gamma^L + \lambda^T), \tag{3.9,g}$$

$$
\begin{aligned}
\omega_{ij} = &(\delta_{ij}\Delta - \partial_i\partial_j)\omega^T + \partial_i\partial_j\omega^L + \\
&+ (\varepsilon_{ik}\partial_k\partial_j + \varepsilon_{jk}\partial_k\partial_i)\omega^{TL} + \varepsilon_{ij}\lambda,
\end{aligned} \tag{3.9,h}
$$

Con estas definiciones resolvemos los vínculos asociados a h_{00}, h_{0k}, ω_{00} y ω_{0k}, obteniendo

$$\Delta\omega^T = \mu\Delta h^T, \tag{3.10,a}$$

$$\Delta\omega^L = -\frac{\Delta(\Delta-\mu^2)}{\mu}h^T, \tag{3.10,b}$$

$$\Delta\omega^{TL} + \lambda = \mu(\Delta h^{TL} + V), \tag{3.10,c}$$

$$\Delta(n^T + v^L) = \frac{\Delta^2}{\mu}h^T, \tag{3.10,d}$$

$$\omega_{i0} = \varepsilon_{ij}\partial_j\Delta h^T + \partial_i(\Delta h^{TL} + V). \tag{3.10,e}$$

Al sustituir la solución de los vínculos en (3.8), llegamos, casi, a la forma final de la acción reducida

$$\begin{aligned} S^l_{VCS} =&< 2\Delta\dot{h}^T\Delta\omega^{TL} + \Delta h^T(\Delta-\mu^2)\Delta h^T + \mu^2\Delta h^{TL}\Delta h^{TL} + \\ &+ \mu^2 VV + 2\mu^2 V\Delta h^{TL} - 2\mu\Delta h^{TL}\Delta\omega^{TL} - 2\mu\Delta\omega^{TL}V > \\ =&< 2\Delta\dot{h}^T\Delta\omega^{TL} + \Delta h^T(\Delta-\mu^2)\Delta h^T - 2\mu\Delta\omega^{TL}(V + \Delta h^{TL}) + \\ &+ \mu^2(\Delta h^{TL} + V)(\Delta h^{TL} + V) >, \end{aligned} \tag{3.11}$$

donde observamos que todavía hay un vínculo cuadrático asociado a $\Delta h^{TL} + V$, cuya solución es

$$\Delta h^{TL} + V = \frac{\Delta}{\mu}\omega^{TL}. \tag{3.12}$$

sustituyendo (3.12) en (3.11) llegamos a la forma final de S^l_{VCS}

$$S^{l\ (Red)}_{VCS} =< 2\Delta\dot{h}^T\Delta\omega^{TL} + \Delta h^T(\Delta-\mu^2)\Delta h^T - \Delta\omega^{TL}\Delta\omega^{TL} > . \tag{3.13}$$

Definimos

$$Q = \sqrt{2}(-\Delta)h^T, \tag{3.14,a}$$

$$\pi = \sqrt{2}(-\Delta)\omega^{TL}, \tag{3.14,b}$$

y $S^{l(red)}_{VCS}$ se escribe como

$$S_{VCS}^{l\ (red)} =< \pi\dot{Q} - \frac{1}{2}Q(-\Delta + \mu^2)Q - \frac{1}{2}\pi\pi >, \tag{3.15}$$

que, justamente, muestra que S_{VCS}^l describe una sóla excitación masiva, con masa μ, y la teoría tiene energía definida positiva, independiente del signo de μ.

Observemos que luego de resolver los vínculos asociados a ω_{00}, ω_{0k}, h_{00} y h_{0k}, quedan indeterminados entre otras variables $n^L - v^T$ y h^L y que, luego de sustituir la solución de ellos, estas dos variables ya no aparecen. Miremos como cambian las distintas componentes de h_{mn} $(\xi_m = (\xi, \xi_i = \varepsilon_{ij}\partial_j\xi^T + \partial_i\xi^L))$

$$\delta h_{00} = \dot{\xi} \quad , \quad \delta h_{0i} = \dot{\xi}_i, \tag{3.16,a}$$

$$\delta(n^T + v^L) = 0 \quad , \quad \delta(n^L - v^T) = \xi, \tag{3.16,b}$$

$$\delta h^T = 0 \quad , \quad \delta h^L = \xi^L, \tag{3.16,c}$$

$$\delta h^{TL} = \frac{1}{2}\xi^T \quad , \quad \delta V = -\frac{1}{2}\delta\xi^T. \tag{3.16,d}$$

Observamos que h_{00}, h_{0i} transforman acorde a su rol. Luego de sustituir (3.10), la acción (3.11) todavía es invariante de calibre y se expresa sólo en función de cantidades invariantes de calibre (ver que $\delta_\xi(\Delta h^{TL}+\mathrm{V})=0$), ya que no fué necesario explotar la invariancia de calibre para resolver los vínculos. Así, estas variables que "desaparecen" son fijadas libremente y $S_{VCS}^{l(red)}$ no depende del calibre que fijemos en su reducción. Esto puede verse si partimos de la acción de segundo orden de S_{VCS}^l, que escribimos como

$$S_{VCS}^l = -\frac{1}{2} < h_{pa}(G^{pa} + \mu\varepsilon^{prs}\partial_r {h_s}^a) >, \tag{3.17}$$

donde observamos que el factor que multiplica a h_{pa} es transverso en p e invariante de calibre, lo cual asegura que S_{VCS}^l es invariante de calibre pues cambia como una derivada total. Si definimos $W^{pa} \equiv \varepsilon^{prs}\partial_r {h_s}^a$, tenemos que

$$W_{00} = \Delta(n^T + v^L), \tag{3.18,a}$$

$$W_{0i} = \varepsilon_{ik}\partial_k \Delta h^T + \partial_i(\Delta h^{TL} + V), \tag{3.18,b}$$

$$W_{i0} = \varepsilon_{ik}\partial_k(n - \dot{n}^L + \dot{v}^T) + \partial_i(\dot{n}^T + \dot{v}^L), \tag{3.18,c}$$

$$\begin{aligned} W_{ij} = {} & (\delta_{ij}\Delta - \partial_i\partial_j)(n^T - v^L - \dot{h}^{TL} - \frac{1}{(-\Delta)}\dot{V})+ \\ & + \partial_i\partial_j(\dot{h}^{TL} - \frac{1}{(-\Delta)}\dot{V})+ \\ & + \frac{1}{2}(\varepsilon_{ij}\partial_k\partial_j + \varepsilon_{jk}\partial_k\partial_i)(n^L + V^T - \dot{h}^L + \dot{h}^T)+ \\ & + \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}(n^L + v^T - \dot{h}^L - \dot{h}^T), \end{aligned} \tag{3.18,d}$$

$$G_{00} = -\Delta^2 h^T, \tag{3.18,e}$$

$$G_{0i} = G_{i0} = \varepsilon_{ij}\partial_j(\Delta\dot{h}^{TL} - \Delta n^T) - \partial_i\Delta\dot{h}^T, \tag{3.18,f}$$

$$\begin{aligned} G_{ij} = {} & (\delta_{ij}\Delta - \partial_i\partial_j)(2\dot{n}^L - n - \ddot{h}^L) - \partial_i\partial_j\ddot{h}^T+ \\ & + (\varepsilon_{ik}\partial_k\partial_j + \varepsilon_{jk}\partial_k\partial_i)(\ddot{h}^{TL} - \dot{n}^T). \end{aligned} \tag{3.18,g}$$

Así, expresamos S^l_{VCS} como

$$\begin{aligned} S^l_{VCS} = {} & <\Delta h^T\Delta(n - 2\dot{n}^L + \ddot{h}^L) + \Delta(n^T - \dot{h}^{TL})\Delta(n^T - \dot{h}^{TL})+ \\ & + \mu\Delta(n^T + v^L)(\dot{n}^L - \dot{v}^T - n)+ \\ & + \mu\Delta(\Delta h^{TL} + V)(\dot{h}^L - v^T - n^L)+ \\ & + \mu\Delta h^T(\Delta h^{TL} + \dot{V} - \Delta(n^T - v^T)) > \end{aligned} \tag{3.19}$$

que podemos escribir de forma mas sugestiva como

$$\begin{aligned} S^l_{VCS} = {} & <\rho(\Delta h^T - \mu(n^T + v^L)) + \sigma(\mu(\Delta h^{TL} + V) - \Delta\dot{h}^T) + \theta^2+ \\ & - \mu\Delta h^T[(\Delta\dot{h}^{TL} + \dot{V}) + \mu\Delta h^T - \Delta(n^T + v^L)] >, \end{aligned} \tag{3.20}$$

donde ρ, σ y θ son las combinaciones invariantes de calibre

$$\rho = \Delta(n - (\dot{n}^L - \dot{v}^T)), \tag{3.21,a}$$

$$\sigma = \Delta(\dot{h}^L - (n^L + v^T)), \tag{3.21,b}$$

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\Delta}{2}((n^T - v^L) - 2\dot{h}^{TL} + (n^T + v^L) - 2\mu h^T) \\ &= \Delta(n^T - \dot{h}^{TL} - \mu h^T), \end{aligned} \tag{3.21,c}$$

Haciendo variaciones respecto a ρ, σ y θ, llegamos a

$$S^l_{VCS} =< \Delta h^T(\Box - \mu^2)\Delta h^T >, \tag{3.22}$$

que corresponde a un sólo grado de libertad con energía definida positiva.

3.3 Análisis canónico de S^l_{VCS}

Hacemos, ahora el análisis canónico de la acción linealizada de la gravedad VCS. Esto será utilizado para estudiar la equivalencia canónica entre S^l_{VCS} y S^2_{AD} [44]. Partimos de la forma de S^l_{VCS} a segundo orden

$$\begin{aligned} S^l_{VCS} = \frac{1}{2} < \varepsilon^{pmb}\partial_p h_{ma}\varepsilon^{rsa}\partial_r h_{sb} - \frac{1}{2}\varepsilon^{pmn}\partial_p h_{mn}\varepsilon^{lrs}\partial_l h_{rs} + \\ - \mu h_{pa}\varepsilon^{prs}\partial_r h_s{}^a > . \end{aligned} \tag{3.23}$$

Hacemos la descomposición 2+1 y llamamos $n, N_i, M_i, H_{ij} + \varepsilon_{ij}V$ respectivamente a h_{00}, h_{i0}, h_{0i}, h_{ij}, como en (1.25). Llegamos así a

$$
\begin{aligned}
S^l_{VCS} =<&\dot{N}_i(\frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}N_j + \partial_i H_{jj} - \partial_j H_{ij})+\\
&+ \dot{H}_{ij}[\delta_{ij}(\mu V + \partial_k M_k - \frac{1}{2}\dot{H}_{kk}) + \frac{1}{2}\dot{H}_{ij}+\\
&\qquad - \frac{1}{2}(\partial_i M_j + \partial_j M_i) - \frac{\mu}{4}(\varepsilon_{ik}H_{kj} + \varepsilon_{jk}H_{ki})]+\\
&+ n[(\Delta\delta_{ij} - \partial_i\partial_j)H_{ij} + \mu\varepsilon_{ij}\partial_i N_j] - \mu\varepsilon_{ij}\partial_i H_{jk}M_k+\\
&- \frac{1}{4}(N_i + M_i)\Delta(N_i + M_i) - \frac{1}{4}\partial_i(N_i + M_i)\partial_j(N_j + M_j)+\\
&- \mu V\partial_i M_i > .
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

Si definimos los momentos conjugados a las variables dinámicas N_i, H_{ij}

$$
\pi_i \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{N}_i} \quad , \quad \pi_{ij} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{H}_{ij}}, \tag{3.25}
$$

sucede que podemos despejar $\dot{H}_{ij}$

$$
\dot{H}_{ij} = \pi_{ij} - \delta_{ij}(\pi_{ll} - \mu V) + \frac{1}{2}(\partial_i M_j + \partial_j M_i) + \frac{\mu}{4}(\varepsilon_{ik}H_{kj} + \varepsilon_{jk}H_{ki}), \tag{3.26}
$$

y tenemos el vínculo primario

$$
\varphi_i = \pi_i + \partial_j H_{ij} - \partial_i H_{jj} - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}N_j. \tag{3.27}
$$

n es un multiplicador de Lagrange. Sin embargo, escribimos primero el hamiltoniano, cuya densidad es

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_c &= \pi_{ij}\dot{H}_{ij} + \pi_i\dot{N}_i - \mathcal{L}\\
&= \frac{1}{4}(N_i\Delta N_i) + \frac{1}{4}\partial_i N_i\partial_j N_j + \frac{1}{2}\pi_{ij}\pi_{ij} - \frac{1}{2}\pi_{ii}\pi_{jj}+\\
&\quad + \frac{\mu^2}{8}H_{ij}H_{ij} - \frac{\mu^2}{16}H_{ii}H_{jj} - \frac{\mu^2}{2}\varepsilon_{ij}H_{ik}\pi_{kj}+\\
&\quad + n[\partial_i\partial_j H_{ij} - \Delta H_{ii} - \mu\varepsilon_{ij}\partial_i N_j]+\\
&\quad + M_i[\frac{1}{2}\Delta N_i - \frac{1}{2}\partial_i\partial_j N_j + \frac{3}{4}\mu\varepsilon_{kl}\partial_k H_{li} - \frac{\mu}{4}\varepsilon_{ij}\partial_k H_{jk} - \partial_j\pi_{ij}]+\\
&\quad + \mu V[\pi_{ii} - \mu V],
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

donde observamos que además de n, M_i y V también son multiplicadores. Los vínculos primarios adicionales son

$$\varphi \equiv V - \frac{1}{2\mu}\pi_{ii} \tag{3.28,a}$$
$$\psi \equiv -(\delta_{ij}\Delta - \partial_i\partial_j)H_{ij} - \mu\varepsilon_{ij}\partial_i N_j \tag{3.28,b}$$
$$\psi_i \equiv \frac{1}{2}(\delta_{ij}\Delta - \partial_i\partial_j)N_j + \frac{3}{4}\mu\varepsilon_{kl}\partial_k H_{li} - \frac{\mu}{4}\varepsilon_{ij}\partial_k H_{jk} - \partial_j\pi_{ij}. \tag{3.28,c}$$

Sustituimos φ en H_c y comenzamos el procedimiento canónico con

$$\mathcal{H}_c = \mathcal{H}_0 + n\psi + M_i\psi_i + \lambda_i\varphi_i, \tag{3.29}$$

con ψ, ψ_i, φ como en (3.28) y

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 =& \frac{1}{4}N_i\Delta N_i + \frac{1}{4}\partial_i N_i\partial_j N_j + \frac{1}{2}\pi_{ij}\pi_{ij} - \frac{1}{4}\pi_{ii}\pi_{jj} + \\ &+ \frac{\mu^2}{8}H_{ij}H_{ij} - \frac{\mu^2}{16}H_{ii}H_{jj} - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}H_{ik}\pi_{kj}.\end{aligned} \tag{3.30}$$

El álgebra entre los vínculos primarios es

$$\{\Omega_A(x), \Omega_B(y)\} = M_{AB}(x)\delta^{(2)}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}), \tag{3.31}$$

con $\Omega_A = \{\psi, \psi_i, \varphi_i\}$, $\Omega_B = \{\psi, \psi_k, \varphi_k\}$ y

$$M_{AB}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu\varepsilon_{kl}\partial_l \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu\varepsilon_{il}\partial_l & 0 & -\varepsilon_{ik} \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

La conservación de los vínculos sólo aporta relaciones entre los multiplicadores, por lo que el procedimiento termina. Podemos tomar la combinación $\theta \equiv \psi - \partial_i\varphi_i$ por ψ, y entonces el álgebra de los vínculos tendría $(\Omega_A = (\theta, \psi_i, \varphi_i))$

$$M_{AB}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu\varepsilon_{ik} \end{pmatrix}, \tag{3.33}$$

y $\mathcal{H}_c$ sería $(\theta = -\partial_i \pi_i - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i N_j)$

$$\mathcal{H}_c = \mathcal{H}_0 + n\theta + M_i\psi_i + (\lambda_i + \partial_i n)\varphi_i. \tag{3.34}$$

$M_{AB}(x)$ muestra que θ y ψ_i son de primera clase. Las transformaciones de calibre son:

$$\delta(*) = \int \{(*), \xi_a(x')\Psi_a(x')\} d^2x' \tag{3.35}$$

donde Ψ_a son los vínculos de primera clase y ξ es el parámetro de la transformación. Así

$$\begin{aligned}
\delta H_{ij} &= \int d^2x' \{H_{ij}(x), \xi(x')\theta(x') + \xi_k(x')\psi_k(x')\} \\
&= \int d^2x' \{H_{ij}(x), -\xi^k(x')(\partial_l \pi_{lk}(x')\} \\
&= \frac{1}{2}(\partial_i \xi_j + \partial_j \xi_i), \qquad (3.36,\text{a})
\end{aligned}$$

y análogamente

$$\delta N_i = \partial_i \xi, \qquad (3.36,\text{b})$$

como era de esperarse. Para los momentos

$$\begin{aligned}
\delta\pi_i &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\partial_j \xi - \frac{1}{2}(\delta_{ij}\Delta - \partial_i\partial_j)\xi_j, \qquad (3.37,\text{a}) \\
\delta\pi_{ij} &= \frac{\mu}{4}(\delta_{ij}\varepsilon_{kl}\partial_k\xi_l - (\varepsilon_{ik}\partial_k\xi_j + \varepsilon_{jk}\partial_k\xi_i)), \qquad (3.37,\text{a})
\end{aligned}$$

y para V

$$\begin{aligned}
\delta V &= \frac{1}{2\mu}\delta\pi_{ii} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i\xi_j \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\delta h_{ij}. \qquad (3.37,\text{b})
\end{aligned}$$

Por último el hamiltoniano es invariante de calibre, trivialmente, por la conservación de los vínculos de primera clase

$$\delta\mathcal{H}_c = 0 \tag{3.38}$$

4. Equivalencia canónica entre S^2_{AD} y S^l_{VCS}

4.1. El conjunto común de los vínculos

Habíamos llegado en el análisis de la teoría autodual a que el problema dinámico correspondía a tomar

$$\mathcal{H}_0^{(AD)} = \frac{m^2}{2}(H_{ij}H_{ij} - H_{ii}H_{jj}), \tag{4.1}$$

sometido a los vínculos

$$\theta = -\frac{1}{m}\partial_i\pi_i + mH_{ii} + \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i N_j, \tag{4.2,a}$$

$$\varphi_i = \pi_i + \frac{m}{2}\varepsilon_{ij}N_j, \tag{4.2,b}$$

$$\psi_i = \varepsilon_{kl}\partial_k H_{li} - mN_i, \tag{4.2,c}$$

$$\varphi_{ij} = \pi_{ij} - \frac{m}{4}(\varepsilon_{ik}H_{kj} + \varepsilon_{jk}H_{ki}). \tag{4.2,d}$$

En este problema habían sido eliminados V y su momento conjugado π ya que $V = \pi = 0$.

Análogamente para la acción linealizada de la gravedad VCS tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0^{(VCS)} =& \frac{\mu^2}{8}H_{ij}H_{ij} - \frac{\mu^2}{16}H_{ii}H_{jj} + \frac{1}{2}\pi_{ij}\pi_{ij} - \frac{1}{4}\pi_{ii}\pi_{jj} + \\ &- \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}H_{ik}\pi_{kj} + \frac{1}{4}N_i\Delta N_i + \frac{1}{4}\partial_i N_i\partial_j N_j,\end{aligned} \tag{4.3}$$

sometido a los vínculos

$$\theta = -\partial_i\pi_i - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i N_j, \tag{4.4,a}$$

$$\psi_i = \frac{1}{2}(\delta_{ij}\Delta - \partial_i\partial_j)N_j + \frac{3}{4}\mu\varepsilon_{kl}\partial_k H_{li} - \frac{\mu}{4}\varepsilon_{ij}\partial_k H_{jk} - \partial_j\pi_{ij}, \tag{4.4,b}$$

$$\varphi_i = \pi_i + \partial_j H_{ij} - \partial_i H_{jj} - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}N_j, \tag{4.4,c}$$

donde V fué eliminado a través del vínculo $V = (1/2\mu)\pi_{ii}$. Si miramos nuevamente a φ_{ij} de la autodual antes de sustituir $V = 0$ (ec. (1.28,c)) observamos que la relación entre V y π_{ii} es la misma que aquí. Tomaremos de aquí en adelante $m = \mu$.

Observamos que si utilizo los vínculos de la teoría autodual (4.2) en la densidad $\mathcal{H}_0^{(VCS)}$ obtengo $\mathcal{H}_0^{(AD)}$ (ver la ec. (4.20), mas adelante). Así, los tres vínculos adicionales de la teoría autodual podrían corresponder a una fijación de calibre en la teoría VCS linealizada. De hecho

$$\theta(\text{de la } VCS) = -\partial_i\varphi_i(\text{de la } AD), \tag{4.5,a}$$

$$\psi_i(\text{de la } VCS) = -\partial_j\varphi_{ij} - \frac{1}{2\mu}\varepsilon_{ik}\partial_k(\partial_l\varphi_l + \mu\theta)(\text{de la } AD), \tag{4.5,b}$$

$$\varphi_i(\text{de la } VCS) = \varphi_i - \varepsilon_{ij}\psi_j(\text{de la } AD), \tag{4.5,c}$$

Por lo tanto, lo que "sobra" en (4.2) debería corresponder a una fijación de calibre. Esto es

$$\chi = \varepsilon_{ij}\partial_i\varphi_j, \tag{4.6,a}$$

$$\chi_1 = \theta + \frac{1}{\mu}\partial_i\varphi_i, \tag{4.6,b}$$

$$\chi_2 = \delta_{ij}\Delta\varphi_{ij}. \tag{4.6,c}$$

Es fácil ver que estas últimas definiciónes son el "faltante" de (4.2). Del conjunto inicial $\theta, \varphi_i, \varphi_{ij}, \psi_i$ la correspondencia de sus distintas componentes con los vínculos de la teoría VCS linealizada es: $\theta(VCS) \sim \partial_i\varphi_i(AD)$, $\psi_i(VCS) \sim \partial_j\varphi_{ij}(AD)$, $\varphi_i(VCS) \sim \psi_i(AD)$. Luego $\chi \sim \varepsilon_{ij}\partial_i\varphi_j(AD)$, $\chi_1 \sim \theta(AD)$, $\chi_2 \sim \varphi_{ii}(AD)$.

El conjunto común de vínculos de las dos teorías es entonces

$$\zeta \equiv \theta(VCS,\ (4.4,a)) \tag{4.7,a}$$

$$\zeta_i \equiv \psi_i(VCS,\ (4.4,b)) \tag{4.7,b}$$

$$\chi = \varepsilon_{ij}\partial_i\pi_j - \frac{\mu}{2}\partial_i N_i \tag{4.7,c}$$

$$\chi_1 = \mu H_{ii} + \varepsilon_{ij}\partial_i N_j \tag{4.7,d}$$

$$\chi_2 = \Delta\pi_{ii} \tag{4.7,e}$$

$$\varphi_i = (VCS,\ (4.4,c)) \tag{4.7,f}$$

4.2 El hamiltoniano invariante de calibre

El conjunto de vículos (4.7) nos muestra, que para la teoría AD, hay un sector de los vínculos que se comporta como vínculos de primera clase. Aún mas, al calcular la integral funcional de esta teoría, en la medida aparece [45] $(det\{\Omega_A, \Omega_B\})^{1/2}$, donde Ω_A representa a todos los vínculos. Es fácil ver que

$$(det\{\Omega_A, \Omega_B\})^{1/2} = det\{\zeta_a, \chi_b\}(det\{\varphi_i, \varphi_j\})^{1/2}, \tag{4.8}$$

donde, nuevamente, vemos que la teoría corresponde a una teoría de calibre, con transformaciones de calibre generadas por los ζ_a, con fijaciones de calibre χ_a, y sujeta a los vínculos adicionales de segunda clase φ_i. Nos proponemos, entonces, hallar el correspondiente hamiltoniano, invariante de calibre $\widetilde{H}_0^{(AD)}$.

La forma mas general que debe tener $\widetilde{H}_0^{(AD)}$ es [36,44]

$$\widetilde{H}_0^{(AD)} = H_0^{(AD)} + < \alpha_a\zeta_a > + < \beta_a(x,z)\chi_a(z_1) > + \\ + < \beta_{ab}(x,z_1,z_2)\chi_a(z_1)\chi_b(z_2) >, \tag{4.9}$$

donde no se agregan términos con productos de mas de 2 vínculos, pues tratamos con una teoría cuadrática. Pedimos que

$$\{\widetilde{H}_0^{(AD)}, \zeta_a(y)\} = 0 \quad (= V_a{}^b\zeta_b). \tag{4.10}$$

Si

$$\{\beta_{ab}(x,z_1,z_2),\zeta_a(y)\}=0, \tag{4.11}$$

una solución de (4.10) es

$$\{H_0^{(AD)},\zeta_c(y)\}+<\beta_a(x,z_1)\{\chi_a(z_1),\zeta_c(y)\}>=0, \tag{4.12,a}$$

$$\begin{aligned}&<\chi_a(z_1)\{\beta_a(x,z_1),\zeta_c(y)\}>+\\&\quad+2<\beta_{ab}(x,z_1,z_2)\chi_a(z_1)\{\chi_b(z_2),\zeta_c(y)\}>=0,\end{aligned} \tag{4.12,b}$$

y las α_a quedan indeterminadas. Veremos que para una combinación particular de los vínculos de primera clase $\widetilde{H}_0^{(AD)}=H_0^{(VCS)}$.

Para mayor simplicidad de cálculos descomponemos

$$\begin{aligned}\zeta_i&=\varepsilon_{ij}\partial_j\zeta^T+\partial_i\zeta^L\\&\equiv\varepsilon_{ij}\partial_j\widetilde{\zeta}_1+\partial_i\widetilde{\zeta}_2,\end{aligned} \tag{4.13}$$

y tomamos como convención $a,b=0,1,2$ donde ningún subíndice se sobreentiende como 0 (i.e. $\chi=\chi_0,\widetilde{\zeta}=\widetilde{\zeta}_0=\zeta$). El álgebra entre los χ_a's y los $\widetilde{\zeta}_a$'s es

$$\{\chi_a(x),\widetilde{\zeta}_b(y)\}=\begin{pmatrix}-\mu\Delta^x\delta^{(2)}(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}) & 0 & \frac{1}{2}\Delta^x\delta^{(2)}(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y})\\ 0 & -\mu\delta^{(2)}(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}) & 0\\ 0 & 0 & \mu\Delta^x\delta^{(2)}(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y})\end{pmatrix} \tag{4.14}$$

y además

$$\{H_0^{(AD)},\widetilde{\zeta}\}=0, \tag{4.15,a}$$

$$\{H_0^{(AD)},\widetilde{\zeta}_1\}=-\mu^2(-\Delta)^{-1}(\delta_{ij}\Delta-\partial_i\partial_j)H_{ij}, \tag{4.15,b}$$

$$\{H_0^{(AD)},\widetilde{\zeta}_2\}=-\mu^2(-\Delta)^{-1}\varepsilon_{ij}\partial_i\partial_kH_{jk}. \tag{4.15,c}$$

Vamos a (4.12,a) y obtenemos

$$\beta(x,z) = 0, \tag{4.16,a}$$

$$\beta_1(x,z) = \mu K(x-z)(\delta_{ij}\Delta - \partial_i\partial_j)H_{ij}, \tag{4.16,b}$$

$$\beta_2(x,z) =< -\mu K(x-z)K(z-y)\varepsilon_{ij}\partial_i\partial_k H_{jk}(y) >_y, \tag{4.16,c}$$

donde $(-\Delta)K(x-y) = -\delta^{(2)}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y})$. Los corchetes entre los β_a's y los $\widetilde{\zeta}_a$'s dan todos, salvo uno, nulos. Éste es

$$\{\beta_2(x,z_1), \widetilde{\zeta}_2(y)\} = \frac{\mu}{2}\delta^{(2)}(x-z_1)\delta^{(2)}(z_1-z_2). \tag{4.17}$$

Vamos a (4.12,b) y encontramos que el único β_{ab} no nulo es

$$\beta_{22}(x,z_1,z_2) = -\frac{1}{4}K(x-z_1)K(z_1-y). \tag{4.18}$$

Finalmente tenemos que

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_0^{(AD} = H_0^{(AD)} + &< \alpha_a\widetilde{\zeta}_a > + < -\mu(-\Delta)^{-1}\chi_1(\delta_{ij}\Delta - \partial_i\partial_j)H_{ij} + \\ &-\mu((-\Delta)^{-1}\chi_2)((-\Delta)^{-1}\varepsilon_{ij}\partial_i\partial_k H_{jk}) + \\ &-\frac{1}{4}((-\Delta)^{-1}\chi_2)((-\Delta)^{-1}\chi_2) > .\end{aligned} \tag{4.19}$$

donde se entiende que $(-\Delta)^{-1}(*)(x) = -\int d^2y K(x-y)(*)(y)$.

La búsqueda de cual es la combinación de vínculos de primera clase que nos lleva a $H_0^{(VCS)}$ no es trivial. Sin embargo, podemos inducir $H_0^{(AD)}$ a partir de $H_0^{(VCS)}$ con el conjunto de vínculos (4.7). Encontramos, entonces que

$$\begin{aligned}H_0^{(VCS)} = H_0^{(AD)} + <&\widetilde{\zeta}_1(\chi_1 + \widetilde{\zeta}_1 + 2\mu(-\Delta)^{-1}\partial_i\partial_j H_{ij} + \mu H_{jj}) + \\ &+ \widetilde{\zeta}_2(2\widetilde{\zeta}_2 + 2(-\Delta)^{-1}\varepsilon_{ij}\partial_i\partial_k H_{kj} - \frac{1}{2}(-\Delta)\chi_2) + \\ &- \mu((-\Delta)^{-1}\chi_1)(\delta_{ij}\Delta - \partial_i\partial_j)H_{ij} + \\ &- \mu((-\Delta)^{-1}\chi_2)((-\Delta)^{-1}\varepsilon_{ij}\partial_i\partial_k H_{jk}) + \\ &- \frac{1}{4}((-\Delta)^{-1}\chi_2)((-\Delta)^{-1}\chi_2) > .\end{aligned} \tag{4.20}$$

Al comparar con (4.19) encontramos que para la combinación particular de los $\widetilde{\zeta}_a$'s con

$$\alpha = 0, \tag{4.21,a}$$

$$\alpha_1 = \widetilde{\zeta}_1 + \chi_1 + 2\mu(-\Delta)^{-1}\partial_i\partial_j H_{ij} + \mu H_{jj}, \tag{4.21,b}$$

$$\alpha_2 = 2\widetilde{\zeta}_2 + 2(-\Delta)^{-1}\varepsilon_{ij}\partial_i\partial_k H_{kj} - \frac{1}{2}(-\Delta)^{-1}\chi_2, \tag{4.21,c}$$

Resulta que $\widetilde{H}_0^{(AD)} = H_0^{(VCS)}$. Tenemos así, una equivalencia canónica entre la teoría autodual y la VCS linealizada.

4.3 La extensión "invariante de calibre" de $H_0^{(VCS)}$

Vimos que es posible obtener una extensión invariante de calibre de $H_0^{(AD)}$ que es igual a $H_0^{(VCS)}$. En el proceso todavía nos quedaron unos vínculos de segunda clase. Así, podríamos tomarlos a ellos como punto de partida en la teoría VCS y obtener una extensión de $H_0^{(VCS)}$, $\widetilde{H}_0^{(VCS)}$, que corresponda a una teoría con sólo vínculos de primera clase.

Por razones que se aclararán en breve, vamos a considerar el conjunto de vínculos (4.7) y le agregamos los dos vínculos, de segunda clase, que teníamos antes de eliminar a V y su momento conjugado π. El conjunto de vínculos será: φ_i, φ (ecuaciones (3.28,a) y (4.4,c)) y $\widehat{\varphi} \equiv \pi$, que corresponden al sector de vínculos remanente, mas los vínculos de primera clase ζ_a y sus fijaciones de calibre χ_a.

Mirando el álgebra entre el conjunto de vínculos φ_i, φ y $\widehat{\varphi}$ notamos que podemos tomar a uno de los φ_i', y a φ ó $\widehat{\varphi}$ como vínculos de "primera clase", y a los que quedan como sus respectivas fijaciones. Apoyados en esto, escogemos la siguiente designación

$$\zeta_3 \equiv \widetilde{\varphi} = \pi, \tag{4.22,a}$$

$$\zeta_4 \equiv -\partial_i \varphi_i = -\partial_i \pi_i + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i N_j + (\delta_{ij}\Delta - \partial_i \partial_j) H_{ij}, \tag{4.22,b}$$

$$\chi_3 \equiv \mu\varphi - \frac{1}{\mu}\varepsilon_{ij}\partial_i\varphi_j = \mu V - \frac{1}{2}\pi_{ii} - \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i\pi_j - \frac{1}{2}\partial_i N_i + - \frac{1}{\mu}\varepsilon_{ij}\partial_i\partial_k H_{kj}, \tag{4.22,c}$$

$$\chi_4 \equiv -\varepsilon_{ij}\partial_i\varphi_j = -\varepsilon_{ij}\partial_i\pi_j - \frac{\mu}{2}\partial_i N_i - \varepsilon_{ij}\partial_i\partial_k H_{kj}, \tag{4.22,d}$$

donde estamos sugiriendo a $-\frac{1}{\mu}\varepsilon_{ij}\partial_i\varphi_j$ y $-\varepsilon_{ij}\partial_i\varphi_j$ como fijaciones de calibre. Los únicos corchetes no nulos entre vínculos

son

$$\{\chi_3(x), \zeta_3(y)\} = \mu\delta^{(2)}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}), \tag{4.23,a}$$

$$\{\chi_4(x), \zeta_4(y)\} = -\mu\delta^{(2)}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}), \tag{4.23,b}$$

Suponemos

$$\widetilde{H}_0^{(VCS)} = \widetilde{H}_0^{(VCS)} + < \alpha_{a'}\zeta_{a'} > + < \beta_{a'}(x,z)\chi_{a'}(z) > + + < \beta_{a'b'}(x_1 z_1, z_2)\chi_{a'}(z_1)\chi_{b'}(z_2) >, \tag{4.24}$$

donde $a' = 3, 4$. Siguiendo el método ya expuesto en la subsección anterior obtenemos que $\beta_3(x, z_1)$ y

$$\beta_4(x,z) = \frac{\mu}{2}K(x-z)(\mu\varepsilon_{ij}\partial_i\partial_k H_{kj}(x) - \partial_i\partial_j\pi_{ij}(x)). \tag{4.25}$$

Luego observamos que $\{\beta_{a'}(x, z_1), \zeta_{b'}(y)\} = 0$ por lo que $\beta_{a'b'}(x, z_1, z_2)$ es una solución. Así

$$\widetilde{H}_0^{(VCS)} = H_0^{(VCS)} + < \alpha_{a'}\zeta_{a'} > + \frac{\mu}{2} < (-\Delta)^{-1}\chi_4(\mu\varepsilon_{ij}\partial_i\partial_k H_{kj} - \partial_i\partial_j\pi_{ij}) > . \tag{4.26}$$

Los $\alpha_{a'}$'s en (4.26) son arbitrarios. Para alguna escogencia, el modelo será equivalente canónicamente al de una teoría con sólo vínculos de primera clase.

Usando los vínculos, convenientemente escogidos, podemos mirar como transforman H_{ij}, N_i y V $(\delta(*) = \int\{(*), \lambda_{a'}(x^1), \zeta_{a'}(x^1)\}d^2x^1)$

$$\delta H_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji}) = 0, \tag{4.27,a}$$

$$\delta N_j = \delta h_{j0} = \partial_j \lambda_4, \tag{4.27,b}$$

$$\delta V = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\delta h_{ij} = \lambda_3. \tag{4.27,c}$$

Esta transformación es reminiscente de las transformaciones de Lorentz linealizadas para los dreibeins

$$\delta_L h_{mn} = -\varepsilon_{mnl} l^l. \tag{4,28,c}$$

si

$$l^0 = \lambda_3 \quad , \quad l^i = -\varepsilon_{ij}\partial_j\lambda_4. \tag{4.28,b}$$

Si pedimos consistencia al linearizar con el hecho de que $\delta g_{mn} = \delta(e_m{}^a e_n{}^b \;\; \eta_{ab})$, entonces $\delta h_{00} = 0$ y $\delta h_{0i} = -\delta h_{i0}$. Luego para $\omega_n{}^a = -(1/2)\varepsilon^{prs}\partial_p h_{rs} + \varepsilon^{ars}\partial_r h_{sn}$, es inmediato probar que

$$\delta\omega_n{}^a = -\partial_n l^a, \tag{4.29}$$

que corresponde a las transformaciones de Lorentz (linealizadas) para la conexión. La forma particular de los l^l es de tal forma que no choca con las transformaciones de calibre originales $(\delta h_{mn} = \partial_m \xi_n)$. Por ejemplo, la parte transversa de h_{j0} es invariante bajo ambas transformaciones.

Todo lo antes expuesto nos hace suponer que para alguna escogencia de los $\alpha_{a'}$'s en $\widetilde{H}_0^{VCS}$ debe suceder que $\widetilde{H}_0^{(VCS)} = H_0^{(TM)}$, la cual es trivialmente invariante bajo estas transformaciones linealizadas de Lorentz.

Capítulo **IV**

LA GRAVEDAD MASIVA VECTORIAL DE CHERN-SIMONS

En este capítulo presentamos la acción curva cuya linealización corresponde a la acción S^l_{VCS} que fué analizada en el capítulo anterior, y que constituye una alternativa como teoría de gravedad masiva curva en D = 2+1. Esta acción se obtiene sumándole a la acción de Einstein un término, construido con los dreibeins, que es topológico en los índices de universo. Este término es análogo al de CS vectorial, de ahí la denominación de términos de CS triádico. Mostraremos algunas propiedades de esta teoría en contraposición a la otra teoría masiva existente.

1.- La acción dentro de un marco jerárquico de simetrías

Ya hemos señalado la particularidad de que no es posible, en dimensión 2+1, tener partículas sin masa y con spin distinto de cero. Así, si desearamos hablar de gravitones, estos no tendrían spin 2, tal como sucede en dimensiones mayores. En otro orden de ideas, la acción de Einstein en 2+1 dimensiones

$$S_E = -\frac{1}{2\kappa^2}\int d^3x\sqrt{-g}R, \tag{1.1}$$

no posee dinámica local [40]. Ya en el capítulo anterior señalamos

la existencia de dos posibilidades como modelos de spin 2 masivos: la gravedad TM linealizada y la gravedad VCS linealizada. Estas corresponden a la linealización de las respectivas teorías curvas. La segunda de estas es la que introduciremos en este capítulo.

Como teoría curva la gravedad TM corresponde a la acción [14]

$$S_{TM} = -\frac{1}{\mu} S_{CS} - S_E, \tag{1.2}$$

donde

$$S_{CS} = \frac{1}{2\kappa^2} < \omega_{pa}\varepsilon^{pmn}\partial_m \omega_n{}^a - \frac{1}{3}\varepsilon^{pmn}\varepsilon_{abc}\omega_p{}^a\omega_m{}^b\omega_n{}^c >, \tag{1.3}$$

es la clase característica de Chern-Simons. Esta se obtiene de la densidad de Hirzebruch-Pontryagin en dimensión 3+1

$$^*RR \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{mnls}R_{mnrt}R_{ls}{}^{rt} = \partial_m X^m, \tag{1.4}$$

luego de integrar X^3 omitiendo toda dependencia de x^3. En (1.3) $\omega_p{}^a = \omega_p{}^a(e)$ de tal forma que la torsión es nula

$$T_{mn}{}^a = D_m e_n{}^a - D_n e_m{}^a = 0. \tag{1.5}$$

S_E viene dada en su forma, equivalente, en tríadas*

$$S_E = \frac{1}{2\kappa^2} < e_{pa}\varepsilon^{pmn}R^{*a}_{mn} > . \tag{1.6}$$

Resaltamos el hecho de que en (1.2) S_E participa con signo distinto al que aparece en otras dimensiones. Sin embargo, a nivel linealizado el signo de S_E es importante para que la teoría tenga energía definida positiva.

S_{CS} es invariante bajo transformaciones locales conformes

$$\delta e_p{}^a = \frac{1}{2}\rho(x)e_p{}^a, \tag{1.7,a}$$

bajo transformaciones locales de Lorentz

*Ver apéndice A

$$\delta e_p{}^a = e_p{}^b l_b{}^a(x), \tag{1.7,b}$$

y bajo difeomorfismos

$$\delta e_p{}^a = \xi^l(x)\partial_l e_p{}^a + \partial_p \xi^l(x) e_l{}^a. \tag{1.7,c.}$$

Esto se hace claro si notamos que en general

$$\delta S_{CS} = \frac{1}{\kappa^2} < \frac{1}{e}\varepsilon^{rls}(\frac{1}{2}e_{pa}e_{rb} - e_{ra}e_{pb})D_l\delta e_s{}^b R^{**pa} >, \tag{1.8}$$

donde hemos usado el hecho de que, como $T_{mn}{}^a = 0$,

$$e\delta\omega_m{}^a = \varepsilon^{rls}(\frac{1}{2}e_m{}^a e_{rb} - e_{mb}e_r{}^a)D_l\delta e_s{}^b. \tag{1.9}$$

S_E es invariante sólo bajo (1.7,b) y (1.7,c). En S_{TM} se ha perdido, entonces, la invariancia conforme. Así, aunque S_{CS} y S_E no tienen dinámica local, al combinarlos tenemos una teoría con una excitación masiva de spin 2 a expensas de que perdimos la invariancia conforme de S_{CS}.

Existe otra posibilidad de dar dinámica local a S_E si la combinamos con el término de CS triádico [43]

$$S_{TCS} = \frac{1}{2\kappa^2} < e_{pa}\varepsilon^{prs}\partial_r e_s{}^a > . \tag{1.10}$$

Este término es invariante sólo bajo (1.7,c), por lo que al combinarlo con la acción de Einstein tendríamos una teoría curva que es invariante bajo difeomorfismos y no bajo transformaciones de Lorentz. Estas últimas cobran importancia cuando se quiere interpretar la teoría, sin embargo, no nos ocuparemos de eso. La pérdida de invariancia de Lorentz ha sido también observada en teorías vectoriales de calibre abelianas con un término de Chern-Simons cuando se genera dinámicamente un campo magnético que no se anula [48]. La acción propuesta es [43,47]

$$S_{VCS} = S_E - \mu S_{TCS}, \tag{1.11}$$

cuya linealización es la acción intermedia [17] S^l_{VCS} y como vimos describe excitación masiva de helicidad $2\mu/|\mu|$, dependiendo del signo de μ en (1.11). Hay una formulación curva con dreibeins [50], donde se introduce un término llamado de CS traslacional el cual básicamente constituye un acoplamiento del dreiben con la torsión (i.e. $S^{(tras.)}_{CS} \sim< e_{pa}\varepsilon^{pmn}T^a_{mn} >$). Este tiene "lo que le falta" a S_{TCS} para ser invariante Lorentz pero la teoría tiene torsión no nula por lo cual no la tratamos aquí.

Tenemos, entonces, un marco jerárquico de simetrías. Empezamos con el término S_{CS}, de tercer orden (ya que $\omega_p{}^a \sim \partial e^b_m$), invariante bajo transformaciones locales conformes, de Lorentz y de difeomorfismos. Sigue la acción de Einstein, S_E, de segundo orden (ya que $R^{**pa} \sim \partial\omega_m{}^b$), que no es invariante conforme. Por último tenemos el término S_{TCS}, de primer orden e invariante sólo bajo difeomorfismos.

Si hacemos variaciones en S_{CS}, obtenemos

$$\delta S_{CS} = 0 \sim -C^{pl} = 0, \tag{1.12}$$

donde†

$$C^{pl} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{pmn}\mathcal{D}_m\widetilde{R}_n{}^l, \tag{1.13}$$

es el tensor de Cotton. Este tensor es simétrico y de divergencia covariante nula debido a las identidades de Bianchi que satisface el tensor de Einstein $G_p{}^m$, además tiene, explícitamente, traza nula. Así, sólo puede acoplarse a fuentes sin masa y con tensor de energía-momentum sin traza.

Siguiendo con S_E, las ecuaciones de movimiento provenientes de hacer variaciones en ella, son

$$\delta S_E = 0 \sim G^{pl} = 0, \tag{1.14}$$

† Ver apéndice A

donde $G^{pl} = R^{pl} - \frac{1}{2}g^{pl}R$ es el tensor de Einstein. Ya dijimos que S_E no tiene grados dinámicos locales. Al aclopar S_E con materia tendremos que el espacio tiempo es localmente plano fuera de las fuentes, ya que en dimensión 2+1 el tensor de Riemann es equivalente al de Einstein

$$R_{mn}{}^{ls} = -\varepsilon_{mnr}\varepsilon^{lst}G_t{}^r. \tag{1.15}$$

Sin embargo, este espacio, localmente plano, tiene estructura topológica y geométrica no trivial [14,46,49].

En este mismo nivel de simetría está la acción topológica masiva, S_{TM}. Sus ecuaciones de movimiento son

$$\delta S_{TM} = 0 \sim \frac{1}{\mu}C^{pl} - G^{pl} = 0. \tag{1.16}$$

Esta acción, por la presencia de S_E, si puede acoplarse con fuentes masivas. Ya que $C_p{}^p = 0$, tenemos que en ausencia de fuentes externas la curvatura R es nula.

En el nivel de menor simetría está S_{TCS}. Si hacemos variaciones en ella, e imponemos que la torsión sea nula, tendremos

$$\delta S_{TCS} = 0 \sim \omega_m{}^p - \delta_m{}^p\omega_r{}^r = 0, \tag{1.17}$$

donde

$$\omega_m{}^p \equiv \omega_m{}^a e_a{}^p, \tag{1.18}$$

La ecuación (1.17) además dice que $\omega_m{}^p = 0$; así, el término S_{TCS} es trivial por sí solo.

El objeto $\omega_m{}^p$ no es necesariamente simétrico, ni tiene traza nula. Su relación con el tensor de Einstein $G_s{}^p$ es

$$G_s{}^p = \frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{pmn}\mathcal{D}_m\omega_{ns} + \frac{1}{2}\varepsilon^{pmn}\varepsilon_{str}\omega_m^t\omega_m{}^r, \tag{1.19}$$

y la simetría de $G_s{}^p$ induce que

$$\mathcal{D}_t\omega_s{}^s - \mathcal{D}_s\omega_t{}^s = \sqrt{-g}\varepsilon_{pst}\omega^{sp}\omega_r{}^r. \tag{1.20}$$

El primer miembro de (1.20) es la divergencia covariante de (1.17), y su segundo miembro es nulo si $\omega_{sp} = \omega_{ps}$, o si $\omega_r{}^r = 0$. Luego, al acoplar con materia la simetría del T^{mn} implicará su conservación. Igualmente si $T^m{}_m = 0$ también $\mathcal{D}_m T^{mn} = 0$ por (1.20).

Tomando traza en (1.19), obtenemos

$$R = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{pmn}\mathcal{D}_p\omega_{mn} - (\omega_m{}^r\omega_r{}^m - \omega_m{}^m\omega_r{}^r). \tag{1.21}$$

Finalmente, veamos las ecuaciones de la gravedad VCS. Tenemos que las ecuaciones son

$$E^{pa} \equiv R^{**pa} - \mu\varepsilon^{prs}\partial_r e_s{}^a = 0, \qquad (1.22,\text{a})$$

$$\varepsilon^{pmn} D_m e_n{}^a = 0, \qquad (1.22,\text{b})$$

Cuando la torsión es nula, la transformación de difeomorfismos puede escribirse como

$$\delta e_p{}^a = D_p\xi^a + \varepsilon^a{}_{bc} e_p{}^b l_\xi{}^c, \qquad (1.23,\text{a})$$

con

$$l_\xi{}^c \equiv -\xi^n\omega_n{}^c. \qquad (1.23,\text{b})$$

Así

$$\begin{aligned}\delta_\xi S_{VCS} &= \frac{1}{k^2} < \delta e_{pa} E^{pa} > \\ &= < -\xi_a D_p E^{pa} + \mu\varepsilon^{rst} e_{sb} e_{tc}\omega_r{}^b\omega_n{}^c\xi^a e_a{}^n >,\end{aligned}$$

de donde obtenemos la identidad de Bianchi

$$D_p E^{pa} - \mu\varepsilon^{rst}\omega_r{}^b e_{sb}\omega_n^c e_{tc} e^{an} = 0. \qquad (1.24,\text{a})$$

Las identidades (1.24,a) se reescriben como

$$\mathcal{D}_p(G_n{}^p - \mu(\omega_n{}^p - \delta_n{}^p\omega_r{}^r)) - \mu\varepsilon^{rst}\omega_{rs}\omega_{nt} = 0, \qquad (1.24,\text{b})$$

por lo que al aclopar con una fuente simétrica, esta deberá ser covariantemente conservada.

De (1.22) llegamos a las ecuaciones de movimiento

$$\widetilde{R}^{mp} - \mu\omega^{mp} = 0, \qquad (1.25)$$

donde observamos que $\omega^{mp} = \omega^{pm}$. Además en ausencia de fuentes externas la curvatura

$$R = 4\mu\omega_l{}^l, \qquad (1.26)$$

no es necesariamente nula.

De (1.25) podemos relacionar las ecuaciones de la gravedad VCS y la gravedad TM. De hecho, si aplicamos $(-g)^{-1/2}\varepsilon^{srm}\mathcal{D}_r$ a (1.25), usando (1.19), obtendremos

$$\frac{1}{\mu}C^{sp} - G^{sp} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{pmn}\varepsilon^s{}_{rt}\omega_m{}^r\omega_n{}^t, \qquad (1.27)$$

que corresponde a (1.16), pero con un término no homogéneo. Al linealizar, este término no aparece y por tanto afirmamos que las ecuaciones de $S^{2,l}_{TM}$ son como el "rotor" de las de la acción S^l_{VCS}.

Capítulo **V**

ROTURA DE SIMETRÍA

Hemos visto que tenemos teorías masivas de spin 1 y 2 donde todavía quedan invariancia respecto a determinadas transformaciones locales. En este capítulo estudiamos la posibilidad de "romper" estas simetrías, apareciendo un cuadro de estrecha similitud entre las teorías de spines distintos. Veremos que la teoría con mas simetría (la $S^{2,l}_{TM}$) no permite este tipo de proceso.

1.- Teoría de Proca-Chern-Simons

1.1.- La acción como producto de un proceso de rotura espontánea de simetría.

Partimos de la acción a primer orden [51,52]

$$\begin{aligned} S =< P_r P^{r\dagger} - P^r D_r\varphi - P^{r\dagger}(D_r\varphi)^\dagger - (h|\varphi|^2 + U^2)(|\varphi|^2 - V^2)^2 + \\ - \frac{1}{2} f^r f_r + f_r \varepsilon^{rmn}\partial_n a_n - \frac{\mu}{2} a_r \varepsilon^{rmn}\partial_m a_n >, \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde $P_r, P_r^\dagger, \varphi, \varphi^\dagger$ son variables independientes. El acoplamiento entre el campo escalar y el campo de calibre a_r es minimal, así, $D = \partial_r - iea_r$. La acción es invariante bajo las transformaciones

infinitesimales

$$\delta a_r = e^{-1}\partial_r \xi, \tag{1.2,a}$$

$$\delta\varphi = i\xi\varphi, \tag{1.2,b}$$

$$\delta P_r = -i\xi P_r, \tag{1.2,c}$$

$$\delta f_r = 0, \tag{1.2,d.}$$

El procedimiento de rotura espontánea de simetría es el usual: $< \varphi >_{vacio} = V \neq 0$; así, cambiamos $\varphi \to \varphi' = \varphi - V$ y por conveniencia cambiamos $P_r, P_r^\dagger \to P^{r\prime} + ieVa_r, P_r^{\dagger'} - ieVa_r$. En términos de estas nuevas variables, S pasa a ser

$$\begin{aligned} S =< & P^{r\dagger}P_r - P^r D_r\varphi - P^{r\dagger}(D_r\varphi)^\dagger + ieVa_r[(D_r\varphi)^\dagger - D_r\varphi] + \\ & - [h|\varphi|^2_+ hV(\varphi + \varphi^\dagger) + hV^2 + U^2][|\varphi|^2 + V(\varphi + \varphi^\dagger)]^2 > + \\ & + S_{PCS}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde hemos omitido las "$\prime$". S_{PCS} es

$$S_{PCS} = \frac{1}{2} < -f^r f_r + 2f_r\varepsilon^{rmn}\partial_m a_n - \mu a_r \varepsilon^{rmn}\partial_m a_n - m^2 a_r a^r >, \tag{1.4}$$

con

$$m^2 \equiv 2e^2V^2. \tag{1.5}$$

Llamamos a S_{PCS} la acción de Proca-Chern-Simons. En el sector escalar (1.3) puede verse que sólo se propaga la excitación escalar real $\sim \varphi + \varphi^\dagger$ y que la otra excitación escalar posible $\sim \varphi - \varphi^\dagger$ ya no está [53]. Nosotros centraremos nuestra atención en la parte vectorial de (1.3). Esta parte tenía, antes del procedimiento de rotura espontánea de simetría, una sola escitación de masa μ y helicidad $+1$. Luego del proceso, el término $m^2 a_r a^r$ rompe la invariancia de calibre y como veremos S_{PCS} propaga dos excitaciones masivas con masas distintas, a diferencia de la acción de Proca.

1.2.- Analisis Covariante

Las ecuaciones de movimiento provenientes de (1.4) son

$$f^r = \varepsilon^{rmn}\partial_m a_n, \tag{1.6,a}$$

$$\varepsilon^{rmn}(\partial_r f_m - \mu\partial_r a_m) - m^2 a^n = 0. \tag{1.6,b}$$

Si sustituimos (1.6,a) en (1.6,b) obtenemos la ecuación de segundo orden

$$\Box a_n - \partial_n\partial^l a_l - \mu\varepsilon^{rm}{}_n\partial_r a_m - m^2 a_n = 0, \tag{1.7}$$

que trae como consecuencia que a_n es transverso, asegurándonos la no propagación de la componente de spin 0 de a_n.

En el lenguaje de proyectores (1.7) se “ve” como

$$\Box P_n{}^l a_l - \mu\Box^{1/2}\xi_n{}^l a_l - m^2 a_n = 0, \tag{1.8}$$

de donde

$$(\Box^{1/2} + m_\mp)(\Box^{1/2} - m_\pm)P_\pm a = 0, \tag{1.9}$$

con $(\varepsilon \equiv \mu/m)$

$$m_\pm = \frac{m\varepsilon}{2}(\sqrt{1+\frac{4}{\varepsilon^2}} \pm 1). \tag{1.10}$$

Si acoplamos a_m con una fuente externa conservada, i.e. sumamos un término de la forma $a_m J^m$ a la acción, obtenemos que

$$a_m = -\Delta_m{}^l J_l, \tag{1.11,a}$$

con

$$\Delta_m{}^l = \frac{1}{m_+ + m_-}\Big[\frac{m_+}{\Box - m_+^2}(P_m{}^l + \frac{\Box^{1/2}}{m_+}\xi_m{}^l) + \\ + \frac{m_-}{\Box - m_-^2}(P_m{}^l - \frac{\Box^{1/2}}{m_-}\xi_m{}^l)\Big] \tag{1.11,b}$$

En (1.11,b) observamos que el propagador está constituido por 2 términos, los cuales son proporcionales al propagador de la acción autodual. Esto puede verse rápidamente si consideramos la acción

S_{AD} (Capítulo II, ecuación (1.6)) con un término adicional de acoplamiento $a_m J^m$ con $\partial_m J^m = 0$. Las ecuaciones de movimiento en función de proyectores es

$$[\Box^{1/2}(P_+ - P_-) - mP]a = -\frac{1}{m}PJ. \tag{1.12}$$

Invertimos (1.12), llegando a que

$$a_m = -\Delta_{(AD)m}{}^l J_l, \tag{1.13,a}$$

con

$$\Delta_{(AD)m}{}^l = \frac{1}{\Box - m}\Big(P_m{}^l + \frac{\Box^{1/2}}{m}\xi_m{}^l\Big). \tag{1.13,b}$$

Observamos que los términos en (1.11,b) son efectivamente proporcionales a los de la teoría autodual pero con masa m_+ o m_-. Además (1.8) puede factorizarse como [34]

$$-(\Box^{1/2}(P_+ - P_-) - m_+(P_+ + P_-))(-\Box^{1/2}(P_+ - P_-) - m_-(P_+ + P_-))a = 0, \tag{1.14}$$

que es el producto de las condiciones de autodualidad correspondientes (Capítulo II, ecuación (1.4)). Cuando $\mu \to 0$, $m_\pm \to m$ y la ecuación (1.14) es el producto de las "raíces" de la acción de Proca.

1.3.- Descomposición 2+1 y la energía

Si partimos de (1.4), haciendo la descomposición 2+1, llegamos inicialmente a

$$\begin{aligned} S_{PCS} = \frac{1}{2} <& f(f - 2\Delta a^T) + a(m^2 a + 2\mu\Delta a^T - 2\Delta f^T) + \\ &+ 2\mu a^L \Delta\dot{a}^T + 2\dot{a}^L \Delta f^T - 2\dot{a}^T \Delta f^T - f^T \Delta f^T + \\ &- f^L \Delta f^L + m^2 a^T \Delta a^T + m^2 a^L \Delta a^L >, \end{aligned} \tag{1.15}$$

donde hemos tomado $a_0 = a$, $a_i = \varepsilon_{ij}\partial_j a^T + \partial_i a^L$, como en el Capítulo II (análogamente para f_m). Observamos que f y a son multiplicadores asociados a vínculos cuadráticos que permiten despejarlos

$$f = \Delta a^T \quad , \quad a = \frac{1}{m^2}(\Delta f^T - \mu\Delta a^T). \tag{1.16}$$

Al sustituir (1.16) en la acción llegamos a la forma desvinculada de S_{PCS}. Luego de definir

$$Q \equiv (-\Delta)^{1/2} a^T \quad , \quad \pi \equiv (-\Delta)^{1/2} f^L, \tag{1.17,a}$$

$$q \equiv \frac{1}{m}(-\Delta)^{1/2}(f^T - \mu a^T) \quad , \quad p = m(-\Delta)^{1/2} a^L, \tag{1.17,b}$$

la acción reducida toma su forma final

$$S_{PCS}^{(red)} =< \pi\dot{Q} + p\dot{q} - \frac{1}{2}pp - \frac{1}{2}\pi\pi + -\frac{1}{2}q(-\Delta)q$$
$$- \frac{1}{2}Q(-\Delta + m^2)Q + \frac{1}{2}(mQ + \mu q)(mQ + \mu q) >, \tag{1.18}$$

que muestra que el hamiltoniano es definido positivo.

En (1.18) observamos que pareciera existir algún acoplamiento entre los dos grados de libertad, ya que tenemos un término en $S_{PCS}^{(red)}$ de la forma $m\mu qQ$. Sin embargo vimos que el propagador es la suma de dos propagadores "autoduales". Así, el sistema debe estar desacoplado. De hecho, si hacemos la transformación

$$q_\pm \equiv Q + \alpha_\pm q, \tag{1.19,a}$$

$$p_\pm \equiv \pm\frac{(\alpha_\pm \pi - p)}{\alpha_+ - \alpha_-}, \tag{1.19,b}$$

con

$$\alpha_\pm = \pm\frac{m}{m_\pm}, \tag{1.19,c}$$

el sistema se desacopla. Si adicionalmente redefinimos

$$Q_\pm = (\frac{m_\pm}{m_+ + m_-})^{1/2} q_\pm, \tag{1.20,a}$$

$$P_\pm = (\frac{m_+ + m_-}{m_\pm})^{1/2} p_\pm, \tag{1.20,b}$$

llegamos a la expresión final, desacoplada, de S_{PCS}

$$S_{PCS}^{(red)} =< P_+\dot{Q}_+ + P_-\dot{Q}_- - \frac{1}{2}P_+P_+ - \frac{1}{2}P_-P_- - \frac{1}{2}Q_+(-\Delta + m_+^2)Q_+ +$$
$$- \frac{1}{2}Q_-(-\Delta + m_-^2)Q_- > . \tag{1.21}$$

2. Teoría de Einstein autodual

2.1 La acción, análisis covariante

A nivel linealizado la acción de Einstein

$$S_E^l = \frac{1}{2} < 2h_{pa}\varepsilon^{pmn}\partial_m\omega_n{}^a - (\omega_p{}^a\omega_a{}^p - \omega_p{}^p\omega_a{}^a) >, \tag{2.1}$$

es invariante bajo las transformaciones locales

$$\delta h_{pa} = \partial_p\xi_a \quad , \quad \delta\omega_{pa} = 0 \tag{2.2,a}$$

$$\delta h_{pa} = -\varepsilon_{pac}l^c \quad , \quad \delta\omega_{pa} = -\partial_p l_a, \tag{2.2,b}$$

donde (2.2,a) son las transformaciones de calibre y corresponden, a nivel curvo, a las transformaciones de difeomorfismos. (2.2,b) son las correspondientes transformaciones de Lorentz locales.*

El término CS triádico linealizado

$$S_{TCS}^l = \frac{1}{2} < h_{pa}\varepsilon^{prs}\partial_r h_s{}^a >, \tag{2.3}$$

es invariante sólo bajo transformaciones de calibre. Por último, el término de Fierz-Pauli

$$S_{FP} = \frac{1}{2} < h_p{}^a h_a{}^p - h_p{}^p h_a{}^a >, \tag{2.4}$$

no goza de ninguna de estas invariancias.

El contexto presentado se encuentra dentro del mismo espíritu con que analizamos las teorías curvas, cuando presentamos los distintos términos S_{CS}^2, S_E y S_{TCS} como pertenecientes a un esquema jerárquico de simetrías. Aquí, partimos con la acción de Einstein y terminamos con el término de Fierz-Pauli. Cuando consideramos $S_E^l - \mu S_{TCS}^l$, vimos que corresponde a una excitación masiva de helicidad 2. Esta es sólo invariante bajo difeomorfismos. Decimos que la invariancia Lorentz ha sido rota y producto de esto tenemos el espectro físico descrito. Cuando consideramos $-\mu S_{TCS}^l - m^2 S_{FP}$, tenemos la teoría autodual. Decimos que la invariancia de calibre ha sido rota y producto de esto tenemos una excitación masiva de masa $m^2/|\mu|$ y helicidad -2 †. Este proceso es análogo al caso que

*Ver apéndice A

† Ver sub-sección 1.2 del Capítulo III

tomamos el término de CS vectorial y le sumamos el término de Proca, dando como resultado la acción AD vectorial. Esta aparece si tomamos una teoría con un campo escalar acoplado minimalmente con un campo electromagnético, donde tenemos el término de CS vectorial, en vez del término de Maxwell y aplicamos el formalismo de Higgs para romper la simetría de calibre. Por último $S_E - m^2 S_{FP}$ es la acción de Fierz-Pauli, que corresponde por analogía a la acción de Proca.

Vista la analogía con el caso vectorial, cabe, entonces, preguntar que sucede si consideramos la acción [52,54,55,56]

$$S_E^{(AD)} = S_E - \mu S^l_{TCS} - m^2 S_{FP}, \tag{2.5}$$

la cual apodamos acción de Einstein autodual. Miremos primero cual será su espectro físico. Al hacer variaciones respecto a ${\omega_m}^a$, podemos obtener la expresión de ${\omega_m}^a$ en función de ${h_m}^a$. Al sustituirla en la variaciones respecto a h_{pa}, llegamos a

$$\begin{aligned}(\frac{1}{2}\varepsilon^{pma}\varepsilon^{srb} - \varepsilon^{pmb}\varepsilon^{sra})\partial_m\partial_r h_{sb} - \mu\varepsilon^{prs}\partial_r {h_s}^a + \\ - m^2(h^{ap} - \eta^{pa}{h_s}^s) = 0.\end{aligned} \tag{2.6}$$

En función de proyectores y operadores de transferencia, (2.6) queda como

$$\begin{aligned}[(\Box^{1/2} - m)P^2_S - \mu\Box^{1/2}(P^2_{+S} - P^2_{-S}) + m^2(P^1_E - P^1_S) - (\Box - m^2)P^0_S \\ -\frac{\mu}{2}\Box^{1/2}(P^1_{+S} + P^1_{+E} + P^1_{+SE} + P^1_{+ES} - P^1_{-S} - P^1_{-E} - P^1_{-SE} - P^1_{-SE}) + \\ + m^2 P^0_B + \mu\Box^{1/2}(P^0_{BS} + P^0_{SB}) + \sqrt{2}m^2(P^0_{WS} + P^0_{SW})]h = 0.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Aplicamos P^0_{SW}, P^0_B, P^0_{WS} sobre (2.7) y conseguimos que

$$\sqrt{2}m^2 P^0_S h = 0, \tag{2.8,a}$$

$$(m^2 P^0_B + \mu\Box^{1/2}P^0_{BS})h = 0, \tag{2.8,b}$$

$$((\Box - m^2)P^0_{WS} - \mu\Box^{1/2}P^0_{WB} - \sqrt{2}m^2 P^0_W)h = 0. \tag{2.8,c}$$

de donde obtenemos que $P^0_S h = P^0_B h = P^0_W h = 0$. Aplicando $P^1_{\pm S}$ y $P^1_{\pm E}$ sobre (2.7)

$$\pm \frac{\mu}{2}\Box^{1/2}(P^1_{\pm S} + P^1_{\pm SE})h + m^2 P^1_{\pm S}h = 0, \tag{2.9,a}$$

$$\pm \frac{\mu}{2}\Box^{1/2}(P^1_{\pm E} + P^1_{\pm ES})h + m^2 P^1_{\pm E}h = 0, \tag{2.9,b}$$

de donde $P^1_S h = P^1_E h = 0$. Así, nos queda solo el sector de spin 2

$$(\Box \mp \mu\Box^{1/2} - m^2)P^2_{\pm S}h = 0, \tag{2.10}$$

o

$$(\Box^{1/2} - m_\pm)(\Box^{1/2} + m_\mp)P^2_{\pm S}h = 0, \tag{2.10$'$}$$

Observamos que los únicos polos corresponderán a una excitación de masa m_+ con helicidad 2 y otra de masa m_- con helicidad -2. $m_\pm$ tienen la misma forma que en el caso vectorial $(\varepsilon = \mu/m)$

$$m_\pm = \frac{m\varepsilon}{2}(\sqrt{1 + \frac{4}{\varepsilon^2}} \pm 1). \tag{2.11}$$

A semejanza del caso vectorial, la ecuación (2.10), verificada por la parte transversa y sin traza, también se factoriza en un producto de condiciones de auto dualidad (Capítulo III, ecuación (1.12))

$$\begin{aligned} -(\Box^{1/2}(P^2_{+S} - P^2_{-S}) - m_+ P^2_S)(-\Box^{1/2}(P^2_{+S} - P^2_{-S}) - m_- P^2_S)h^{Tt} = \\ = [(\Box - m_+ m_-)P^2_S - (m_+ - m_-)\Box^{1/2}(P^2_{+S} - P^2_{-S})]h^{Tt} \\ = [(\Box - m_+ m_-)P^2_S - \mu\Box^{1/2}(P^2_{+S} - P^2_{-S})]h^{Tt}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

de obtenemos (2.10) aplicando P^2_{+S} o P^2_{-S}. Cabe resaltar que si $K_{AD}(m)h = 0$, son las ecuaciones de movimiento de la acción autodual y $K^{(AD)}_E(m_+, m_-)h = 0$ las de acción de Einstein autodual, resulta que

$$-K_{AD}(m_+)K_{AD}(m_-)h \neq K^{(AD)}_E(m_+, m_-)h, \tag{2.13}$$

a menos que reduzcamos h_{ma} a sus grados físicos de libertad (i.e. h^{Tt}_{ma}).

Miremos el propagador. Si acoplamos h_{ma} con un corriente J^{ma} las ecuaciones son ahora

$$K_E^{(AD)}h = -\kappa J. \tag{2.14}$$

Aplicando las reglas ortogonalidad entre operadores y proyectores*, de igual manera a como hemos hecho en capítulos anteriores, es posible invertir (2.14)

$$h = -\Delta_E^{(AD)}J, \tag{2.15,a}$$

donde

$$\begin{aligned}
\Delta_E^{(AD)} =& \frac{\kappa P^2_{+S}}{(\Box^{1/2} - m_+)(\Box^{1/2} + m_-)} + \frac{\kappa P^2_{-S}}{(\Box^{1/2} + m_+)(\Box^{1/2} - m_-)} + \\
&+ \kappa\frac{(m_+ - m_-)\Box^{1/2}}{2m_+^2 m_-^2}(P^1_{+S} + P^1_{-SE} + P^1_{+E} + P^1_{-ES}) + \\
&- \kappa\frac{(m_+ - m_-)\Box^{1/2}}{2m_+^2 m_-^2}(P^1_{-S} + P^1_{+SE} + P^1_{-E} + P^1_{+ES}) + \\
&+ \frac{\kappa}{m_+ m_-}\Big[(P^1_E - P^1_S) + P^0_B + \frac{1}{\sqrt{2}}(P^0_{SW} + P^0_{WS})\Big] + \\
&+ \frac{\kappa}{m_+^3 m_-^3}\Big[(m_+^2 + m_-^2 - m_+ m_-)\Box - m_+^2 m_-^2)P^0_W + \\
&\qquad - \sqrt{2}m_+ m_-(m_+ - m_-)\Box^{1/2}(P^0_{BW} + P^0_{WB})\Big].
\end{aligned} \tag{2.15,b}$$

Para ver la presencia de los propagadores autoduales de cada excitación, debemos hallar en principio el propagador de S^2_{AD} (Capítulo III, ecuación (1.13)). Si sumamos a S^2_{AD} un término de la forma $< \kappa h_{mn} J^{mn} >$, las ecuaciones de movimiento serán

$$\begin{aligned}
&[(\Box^{1/2} - m)P^2_{+S} - (\Box^{1/2} + m)P^2_{-S} + \frac{1}{2}(\Box^{1/2} - 2m)(P^1_{+S} - P^1_{-E}) + \\
&\quad + \frac{\Box^{1/2}}{2}(P^1_{+SE} + P^1_{+ES} - P^1_{-SE} - P^1_{-ES}) + \\
&\quad + \frac{1}{2}(\Box^{1/2} + 2m)(P^1_{+S} - P^1_{-S}) - \Box^{1/2}(P^0_{BS} + P^0_{SB}) + \\
&\quad + m(P^0_S + P^0_B + \sqrt{2}(P^0_{WS} + P^0_{SW})]h = -\frac{\kappa}{m}J.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

---

* Ver apéndice B

Después de cierto trabajo, usando las reglas de ortogonalidad entre los distintos operadores obtenemos que

$$h = -\Delta^{2(+)}_{(AD)}(m)J \tag{2.17}$$

donde el superíndice $(+)$ nos indica que la excitación tiene helicidad $+2$, m es la masa de la misma. El propagador para cuando se propaga una excitación de masa m y helicidad -2 se obtiene, simplemente, sustituyendo m por $-m$ en $\Delta^{2(+)}_{(AD)}(m)$. Lo llamamos $\Delta^{2(-)}_{(AD)}(m)$. Explícitamente

$$\begin{aligned}\Delta^{2(+)}_{(AD)}(m) = {} & \frac{\kappa}{m(\Box^{1/2} - m)}P^2_{+S} - \frac{\kappa}{m(\Box^{1/2} + m)}P^2_{-S} + \frac{\kappa}{m^2}(P^1_E - P^1_S) + \\ & - \frac{\kappa\Box^{1/2}}{2m^3}(P^1_{+S} + P^1_{+E} - P^1_{-S} - P^1_{-E}) + \\ & + \frac{\kappa\Box^{1/2}}{2m^3}(P^1_{+SE} + P^1_{+ES} - P^1_{-SE} - P^1_{-ES}) + \\ & + \frac{\kappa}{2m^4}[(\Box - m^2)P^0_W + \sqrt{2}m\Box^{1/2}(P^0_{WB} + P^0_{BW})] + \\ & + \frac{\kappa}{m^2}[P^0_B + \frac{1}{\sqrt{2}}(P^0_{SW} + P^0_{WS})].\end{aligned} \tag{2.18}$$

Entonces es inmediato ver que

$$\Delta^{(AD)}_E = \frac{1}{m_+ + m_-}[m_+\Delta^{(+)}_{(AD)}(m_+) + m_-\Delta^{(-)}_{(AD)}(m_-)], \tag{2.19}$$

donde, al igual que en el caso vectorial, el propagador es la suma de propagadores “autoduales”. Las restricciones que por razones físicas deba cumplir J serán las mismas tanto en la teoría de Einstein autodual como en la teoría autodual.

2.2 Descomposición 2+1

Partimos de (2.5) y llegamos inicialmente a

$$\begin{aligned} S_E^{(AD)} =<& h_{00}[\mu\varepsilon_{ij}\partial_i h_{j0} - \varepsilon_{ij}\partial_i\omega_{j0} - m^2 h_{ii}] - \omega_{00}[\omega_{ii} - \varepsilon_{ij}\partial_i h_{j0}]+ \\ &+ h_{0k}[-\mu\varepsilon_{ij}\partial_i h_{jk} + \varepsilon_{ij}\partial_i\omega_{jk} + m^2 h_{k0}]+ \\ &+ \omega_{0k}[\varepsilon_{ij}\partial_i h_{jk} + \omega_{k0}] + \frac{\mu}{2} h_{ik}\varepsilon_{ij}\dot{h}_{jk}+ \\ &- \frac{\mu}{2} h_{i0}\varepsilon_{ij}\dot{h}_{j0} + h_{i0}\varepsilon_{ij}\dot{\omega}_{j0} - h_{ik}\varepsilon_{ij}\dot{\omega}_{jk}+ \\ &- \frac{m^2}{2}(h_{ij}h_{ji} - h_{ii}h_{jj}) - \frac{1}{2}(\omega_{ij}\omega_{ji} - \frac{1}{2}\omega_{ii}\omega_{jj}) >, \end{aligned} \tag{2.20}$$

donde observamos que h_{00}, h_{0k}, ω_{00} y ω_{0k} son multiplicadores, cuyos vínculos asociados permiten despejar ω_{k0} y h_{k0}, y

$$\omega_{ii} = \frac{1}{m^2}(\delta_{ij}\Delta - \partial_i\partial_j)(\omega_{ij} - \mu h_{ij}), \tag{2.21,a}$$

$$h_{ii} = \frac{1}{m^4}(\delta_{ij}\Delta - \partial_i\partial_j)(\mu^2 + m^2)(h_{ij} - \mu\omega_{ij}), \tag{2.21,b}$$

Hacemos la descomposición usual

$$h_{ij} = (\delta_{ij}\Delta - \partial_i\partial_j)h^T + \partial_i\partial_j h^L + (\varepsilon_{ik}\partial_k\partial_j + \varepsilon_{jk}\partial_k\partial_i)h^{TL} + \varepsilon_{ij}V, \tag{2.22,a}$$

$$\omega_{ij} = (\delta_{ij}\Delta - \partial_i\partial_j)\omega^T + \partial_i\partial_j\omega^L + (\varepsilon_{ik}\partial_k\partial_j + \varepsilon_{jk}\partial_k\partial_i)\omega^{TL} + \varepsilon_{ij}\lambda, \tag{2.22,b}$$

que sustituimos en (2.20) junto con la solución de los vínculos (2.21) (donde despejamos Δh^L y $\Delta\omega^L$), además de ω_{k0} y h_{k0}. Llegamos así a

$$\begin{aligned} S_E^{(AD)} =<& 2\Delta\dot{h}^T[\Delta\omega^{TL} - \mu\Delta h^{TL}] + 2\Delta\dot{\omega}^T\Delta h^{TL} + \lambda\lambda + m^2 VV+ \\ &- \Delta\omega^{TL}\Delta\omega^{TL} - m^2\Delta h^{TL}\Delta h^{TL} + \Delta h^T(\Delta - m^2)\Delta h^T+ \\ &+ \Delta(\omega^T - \mu h^T)\frac{\Delta}{m^2}\Delta(\omega^T - \mu h^T) - \Delta\omega^T\Delta\omega^T > . \end{aligned} \tag{2.22}$$

Haciendo las definiciones

$$Q \equiv \sqrt{2}\Delta h^T \quad , \quad q \equiv \sqrt{2}\frac{\Delta(\omega^T - \mu h^T)}{m} \tag{2.23,a}$$

$$\pi \equiv \sqrt{2}\Delta\omega^{TL} \quad , \quad p \equiv \sqrt{2}m\Delta h^{TL} \tag{2.23,b}$$

la acción toma su forma final

$$S_E^{(AD)(red)} =< \pi\dot{Q} + p\dot{q} - \frac{1}{2}pp - \frac{1}{2}\pi\pi - \frac{1}{2}q(-\Delta)q$$
$$- \frac{1}{2}Q(-\Delta + m^2)Q - \frac{1}{2}(mQ + \mu q)(mQ + \mu q) >, \quad (2.24)$$

que corresponde a 2 excitaciones, con energía definida positiva. El aspecto de (2.24) es exactamente el mismo que (1.18) del caso vectorial. Así, sabemos que las dos excitaciones estan desacopladas y tienen masas m_+ y m_-. Este resultado reafirma lo que ha venido ocurriendo a lo largo del trabajo respecto a la analogía entre los casos vectoriales y tensoriales.

Este esquema se repite con las teorías de spin 3 y suponemos que pueda generalizarse para cualquier spin entero [20].

3.- La no viabilidad de romper la simetría para la teoría TM

3.1.- La teoría con los dos términos de CS

Hemos visto que podemos romper, consistentemente, la simetría de la teoría S_{VCS} linealizada. La teoría TM es invariante bajo transformaciones locales de calibre y de Lorentz. Esto nos presenta un marco de simetrías mas amplio para "romper". Analizamos primero la posibilidad de que se pierda sólo la invariancia Lorentz.

La acción de la teoría TM es

$$S_{TM}^{2,l} = \frac{1}{4\mu}\Big\langle -\varepsilon^{lmr}\partial_l h_{mp}^{(s)} G^{pa}(h^{(s)})\eta_{ra} + \mu h_{pa}^{(s)} G^{pa}(h^{(s)})\Big\rangle, \qquad (3.1)$$

donde, como siempre

$$h_{ma}^{(s)} = h_{ma} + h_{am} \qquad (3.2)$$

$S_{TM}^{2,l}$ es claramente invariante bajo las transformaciones mencionadas. En particular la invariancia Lorentz en (3.1) es trivial pues la acción depende sólo de $h_{ma}^{(s)}$. Podemos reescribir (3.1) si notamos

que la expresión de $\omega_m{}^a$, en función de $h_m{}^a$, cuando la torsión es nula

$$\omega_a{}^m = -\frac{1}{2}\delta_a{}^m \varepsilon^{rse}\partial_r h_{sl} + \varepsilon^{mrs}\partial_r h_s{}^a, \tag{3.3}$$

nos permite obtener

$$\varepsilon^{pmn}\partial_m \omega_n{}^a = -G^{pa}(h^{(s)}), \tag{3.4,a}$$

$$\frac{1}{2}\Big\langle \omega_{pa}\omega^{ap} - \omega_p{}^p \omega_a{}^a \Big\rangle = -\frac{1}{4}\Big\langle h^{(s)}_{mn} G^{mn}(h^{(s)}) \Big\rangle = S_E. \tag{3.4,b}$$

Así

$$S^{2,l}_{TM} = \frac{1}{2\mu}\Big\langle \omega_{pa}\varepsilon^{pmn}\partial_m \omega_n{}^a - \mu(\omega_{pa}\omega^{ap} - \omega_p{}^p \omega_a{}^a) \Big\rangle, \tag{3.5}$$

con ω_{pa} dado por (3.3).

Una expresión a primer orden de $S^{2,l}_{TM}$ es

$$S^{2,l}_{TM_1} = \frac{1}{2\mu}\Big\langle \omega_{pa}\varepsilon^{pmn}\partial_m \omega_n{}^a - \mu(\omega_{pa}\omega^{ap} - \omega_p{}^p \omega_a{}^a) + $$
$$+ 2\mu\lambda_p{}^a \varepsilon^{prs}(\partial^r h_{sa} - \omega_r{}^b \varepsilon_{bsa}) \Big\rangle, \tag{3.6}$$

donde hemos agregado un "multiplicador" $\lambda_p{}^a$ de forma que se forza el "vínculo" (3.3). (3.6) es invariante bajo las transformaciones de calibre: $\delta h_{pa} = \partial_p \xi_a$, $\delta\omega_{pa} = 0$ y las de Lorentz: $\delta h_{pa} = -\varepsilon_{pab} l^b$, $\delta\omega_{pa} = -\partial_p l_a$. En ambos casos $\delta\lambda_p{}^a = 0$.

Rompemos la invariancia de Lorentz sumando, a la acción, el término S^l_{TCS}. Así, partimos de la acción [55,56]

$$\begin{aligned} S_{(CS+CS)} &= S^{2,l}_{TM_1} - m S^l_{TCS} \\ &= \frac{1}{2\mu}\Big\langle \omega_{pa}\varepsilon^{prs}\partial_r \omega^a_s - \mu(\omega_{pa}\omega^{ap} - \omega_p{}^p \omega_a{}^a) + \\ &\qquad + 2\mu\lambda_p{}^a \varepsilon^{prs}(\partial_r h_{sa} - \omega_r{}^b \varepsilon_{bsa}) + \\ &\qquad - m\mu h_{pa}\varepsilon^{prs}\partial_r h_s{}^a \Big\rangle. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Las ecuaciones de movimiento provenientes de hacer variaciones respecto a ω_{pa}, λ_{pa} y h_{pa} son

$$\varepsilon^{prs}\partial_r \omega_s{}^a - \mu(\omega^{ap} - \eta^{pa}\omega_r{}^r) - \mu(\lambda^{ap} - \eta^{pa}\lambda_r{}^r) = 0, \tag{3.8,a}$$

$$\varepsilon^{prs}\partial_r h_s{}^a - (\omega^{ap} - \eta^{pa}\omega_r{}^r) = 0 \tag{3.8,b}$$

$$\varepsilon^{prs}\partial_r(\lambda_s{}^a - m h_s{}^a) = 0, \tag{3.8,c}$$

donde (3.8,b) es la ecuación equivalente a (3.3).

Si tomamos la divergencia respecto a p en (3.8) y sacamos su parte antisimétrica obtenemos que ω_{pa} y λ_{pa} son simétricos; y para ω_{pa}, λ_{pa} y h_{pa} se cumple

$$\partial_a (*)^{pa} - \partial^p (*)_a{}^a = 0. \tag{3.10}$$

Tomando la traza de (3.8), tendremos en consecuencia que

$$m\varepsilon^{prs}\partial_r h_{sp} = \omega_r{}^r = \lambda_r{}^r = 0, \tag{3.11,a}$$

$$\partial_p \omega^{pa} = \partial_p \lambda^{pa} = 0. \tag{3.11,b}$$

Así que de ω_{pa} y λ_{pa} nos quedarán sólo sus partes transversas y sin traza. Tomando divergencia respecto a "a" en (3.8) y con (3.11,a) tendremos que si escogemos el calibre $\partial_p h^{pa} = 0$, entonces h_{pa} es simétrico y como resultado, al igual que para λ_{pa} y ω_{pa} nos quedará solo su parte transversa y sin traza. Tenemos, por tanto, que el sistema (3.8) describe excitaciones de spin 2 puro.

Al tomar en cuenta que sólo importan las partes ω_{pa}^{Tt}, λ_{pa}^{Tt} y h_{pa}^{Tt}, obtenemos que para h_{pa}^{Tt} se cumple

$$\varepsilon^{prs}\partial_r \Box h_s^{Tt_a} - \mu \Box h^{Tt_{pa}} + m\mu\varepsilon^{prs}\partial_r h_s^{Tt_a} = 0, \tag{3.12}$$

que al proyector en sus partes $h_{pa}^{Tt_{(+)}}$ y $h_{pa}^{Tt_{(-)}}$, nos da

$$(\Box^{1/2}(\Box^{1/2} \mp \mu) - m\mu)\Box^{1/2} h_{pa}^{Tt_{(\pm)}} = 0, \tag{3.13}$$

o

$$(\Box^{1/2} \mp M_+)(\Box^{1/2} \pm M_-)\Box^{1/2} h_{pa}^{Tt_{(\pm)}} = 0, \tag{3.13}$$

con $(\varepsilon = \mu/m)$

$$M_\pm = \frac{m\varepsilon}{2}\Big(\sqrt{1 + \frac{4}{\varepsilon}} \pm 1\Big). \tag{3.14}$$

La posible excitación sin masa no aparece. Esto se ve mas claro al hacer la descomposición $2{+}1$ de $S_{(CS+CS)}$. Sin embargo, notaremos que el sistema no es viable pues carece de energía definida positiva.

Al hacer la descomposición 2+1 obtenemos inicialmente

$$
\begin{aligned}
S_{(CS+CS)} = \frac{1}{2\mu}\Big\langle 2\omega_{0a}C^a + 2h_{0a}D^a + 2\lambda_{0a}E^a + \\
&+ \omega_{i0}\varepsilon_{ij}\dot{\omega}_{j0} - \omega_{ik}\varepsilon_{ij}\dot{\omega}_{jk} - m\mu h_{i0}\varepsilon_{ij}\dot{h}_{j0} + \\
&+ m\mu h_{ik}\varepsilon_{ij}\dot{h}_{jk} + 2\mu\lambda_{i0}\varepsilon_{ij}\dot{h}_{j0} + \\
&- 2\mu\lambda_{ik}\varepsilon_{ij}\dot{h}_{jk} + \mu(\omega_{ii}\omega_{jj} - \omega_{ij}\omega_{ji}) + \\
&+ 2\mu(\lambda_{ii}\omega_{jj} - \lambda_{ij}\omega_{ji})\Big\rangle, \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

donde los vínculos asociados a los multiplicadores ω_{0a}, h_{0a} y λ_{0a}, son

$$
\begin{aligned}
C^0 &\equiv -\varepsilon_{ij}\partial_i\omega_{j0} - \mu\omega_{ii} - \mu\lambda_{ii} = 0, && (3.16,\text{a}) \\
C^k &\equiv \varepsilon_{ij}\partial_i\omega_{jk} + \mu\omega_{k0} + \mu\lambda_{k0} = 0, && (3.16,\text{b}) \\
D^0 &\equiv m\mu\varepsilon_{ij}\partial_i h_{j0} - \mu\varepsilon_{ij}\partial_i\lambda_{j0} = 0, && (3.16,\text{c}) \\
D^k &\equiv -m\mu\varepsilon_{ij}\partial_i h_{jk} + \mu\varepsilon_{ij}\partial_i\lambda_{jk} = 0, && (3.16,\text{d}) \\
E^0 &\equiv -\mu\omega_{ii} - \mu\varepsilon_{ij}\partial_i h_{j0} = 0, && (3.16,\text{e}) \\
E^k &\equiv \mu\omega_{k0} + \mu\varepsilon_{ij}\partial_i h_{jk} = 0. && (3.16,\text{f})
\end{aligned}
$$

Descomponemos h_{ij} y ω_{ij} como en (2.22). A λ_{ij} lo descomponemos igualmente

$$
\lambda_{ij} = (\delta_{ij}\Delta - \partial_i\partial_j)\rho^T + \partial_i\partial_j\rho^L + (\varepsilon_{ik}\partial_k\partial_j + \varepsilon_{jk}\partial_k\partial_i)\rho^{TL} + \varepsilon_{ij}\rho \qquad (3.17.)
$$

Del conjunto de vínculos (3.16) despejamos ω_{k0}, λ_{k0}, $\Delta\omega^L$, $\Delta\rho^{TL}$,

$\Delta\rho^T$, $\Delta\rho^L$ y la parte transversa de h_{k0}, ΔN^T, obteniendo

$$\omega_{k0} = \varepsilon_{kj}\partial_j \Delta h^T + \partial_k(\Delta h^{TL} + V), \quad (3.18,\text{a})$$

$$\lambda_{k0} = \frac{1}{\mu}[\varepsilon_{kj}\partial_j(\Delta\omega^T - \mu\Delta h^T) + \partial_k(\Delta\omega^{TL} + \lambda - \mu\Delta h^{TL} - \mu v)], \quad (3.18,\text{b})$$

$$\Delta\omega^L = \frac{(\Delta - m\mu)\Delta\omega^T}{m\mu} - \frac{\Delta^2}{m}h^T, \quad (3.18,\text{c})$$

$$\Delta\rho^{TL} + \rho = m(\Delta h^{TL} + V), \quad (3.18,\text{d})$$

$$\Delta\rho^T = m\Delta h^T, \quad (3.18,\text{e})$$

$$\Delta\rho^L = -\frac{\Delta^2}{m\mu}\omega^T + \frac{1}{m\mu}((m+\mu)\Delta - m^2\mu)\Delta h^T, \quad (3.18,\text{f})$$

$$\Delta N^T = \frac{1}{m\mu}\Delta^2(\omega^T - \mu h^T). \quad (3.18,\text{g})$$

Al sustituir (3.18) en (3.15), llegamos a

$$\begin{aligned} S_{(CS+CS)} = \frac{1}{\mu}\Big\langle & 2\mu\Delta\dot{h}^T H^{TL} + 2\Delta\dot{\omega}^T\Delta\omega^{TL} + \\ & + 2\Delta\omega^T(\Delta - m\mu)\Delta h^T - \mu\Delta\omega^T\Delta\omega^T + \\ & - \mu\Delta h^T\Delta\Delta h^T - 2\mu\Delta\omega^{TL}(H^{TL} + \rho) + \\ & + 2\mu\rho(\Delta\omega^{TL} + \lambda) - \mu\Delta\omega^{TL}\Delta\omega^{TL} + \mu\lambda\lambda\Big\rangle, \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde

$$H^{TL} \equiv m(\Delta h^{TL} + V) - \rho. \quad (3.20)$$

Observamos que la parte longitudinal de h_{k0}, ΔN^L, no aparece en la acción. Esta constituye la parte sensible a transformaciones de calibre de esta variable. Así, (3.20) es explícitamente invariante de calibre ($\delta H^{TL} = 0$). λ y ρ aparecen como multiplicadores de Lagrange asociados a vínculos cuadráticos que permiten despejarlos

$$\lambda = -\rho = \Delta\omega^{TL}. \quad (3.21)$$

Al sustituir λ y ρ, y hacer las redefiniciones

$$Q_1 = \sqrt{2}\Delta h^T \quad , \quad P_1 = \sqrt{2}H^{TL}, \quad (3.22,\text{a})$$

$$Q_2 = \sqrt{2}\frac{\Delta}{\mu}\omega^{TL} \quad , \quad P_2 = \sqrt{2}\Delta\omega^{TL}, \quad (3.22,\text{b})$$

llegamos a la forma final, reducida, de $S_{(CS+CS)}$

$$
\begin{aligned}
S^{(red)}_{(CS+CS)} = \Big\langle \dot{Q}_1 P_1 + \dot{Q}_2 P_2 + \frac{1}{2} P_1 P_1 - \frac{1}{2} P_2 P_2 + \\
& - \frac{1}{2}(P_1 + P_2)^2 - \frac{1}{2} Q_2 (-\Delta) Q_2 + \\
& - \frac{1}{2}(m Q_1 + \mu Q_2)^2 + \frac{1}{2}(Q_1 - Q_2)(-\Delta)(Q_1 - Q_2) + \\
& + \frac{1}{2} m^2 Q_1 Q_1 \Big\rangle, \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

con energía no definida positiva. Así, la teoría TM linealizada no permite una rotura espontánea, consistente, de su simetría bajo transformaciones de Lorentz.

3.2.- La teoría TM con todas sus simetrías rotas

Miremos, ahora, que sucede si consideramos la posibilidad, mas fuerte, de poder romper todas las simetrías de la teoría TM, linealizada. Esto se consigue si le sumamos a $S^{2,l}_{TM}$ el término de Fierz-Pauli. Partimos entonces de la acción [55,56]

$$
\begin{aligned}
S_{(TM+FP)} &= S^{2,l}_{TM_1} + m^2 S_{FP} \\
&= \frac{1}{2\mu} \Big\langle \omega_{pa} \varepsilon^{prs} \partial_r \omega_s{}^a - \mu(\omega_{pa}\omega^{pa} - \omega_p{}^p \omega_a{}^a) + \\
&\qquad + 2\mu \lambda_p{}^a \varepsilon^{prs}(\partial_r h_{sa} - \omega_r{}^b \varepsilon_{bsa}) + \\
&\qquad + m^2 \mu (h_{pa} h^{ap} - h_p{}^p h_a{}^a) \Big\rangle. \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

Las ecuaciones de movimiento son

$$\varepsilon^{prs} \partial_r \omega_s{}^a - \mu(\omega^{ap} - \eta^{pa}\omega_r{}^r) - \mu(\lambda^{ap} - \eta^{pa}\lambda_r{}^r) = 0, \qquad (3.25,\text{a})$$

$$\varepsilon^{prs} \partial_r \lambda_s{}^a + m^2 (h^{ap} - \eta^{pa} h_r{}^r) = 0, \qquad (3.25,\text{b})$$

$$\varepsilon^{prs} \partial_r h_s{}^a - (\omega^{ap} - \eta^{pa} h_r{}^r) = 0, \qquad (3.25,\text{c})$$

Si tomamos divergencia respecto a p, sacamos la parte antisimétrica y la traza de (3.25), obtenemos que tanto para ω_{pa}, λ_{pa} y h_{pa}, se cumple

$$\partial_a (*)^{pa} - \partial^p (*)_a{}^a = 0, \qquad (3.26,\text{a})$$

$$\varepsilon_{pal} (*)^{pa} = 0, \qquad (3.26,\text{b})$$

$$(*)_a{}^a = 0, \qquad (3.26,\text{c})$$

quedándonos solo la parte se spin 2 de cada uno. Las ecuaciones para $h_{pa}^{Tt(\pm)}$ son

$$[\Box(\Box^{1/2} \mp \mu) \pm m^2\mu]h_{pa}^{Tt(\pm)} = 0. \tag{3.27}$$

Las posibles excitaciones, masivas tendrán masas que constituyen las raíces positivas de $x^3 \mp \mu x^2 \pm m^2\mu$. Para la helicidad $+2$ observamos que x^3 crece mas lento que $\mu x^2 - m^2\mu$, si $x < \mu$. Luego, si μ es grande comparado con m^2, tenemos la posibilidad de que existan 2 raíces positivas de la correspondiente ecuación para las masas. Una será menor que μ y la otra mayor que μ (estamos suponiendo que $\mu > 0$). Las llamamos m_{+1} y m_{+2}. La tercera raíz es negativa, pero constituye el opuesto de la única raíz positiva de la ecuación de las masas para la helicidad -2. La llamamos m_-. Las otras dos raíces de la ecuación para esta helicidad (-2) son $-m_{+1}$ y $-m_{+2}$. Si cambiamos μ por $-\mu$ se invierten las helicidades del espectro. Si cambiamos m^2 por $-m^2$ aparecen raíces complejas. Por lo tanto, para $\mu > 0$, (3.27) se factoriza como

$$(\Box^{1/2} \mp m_{+1})(\Box^{1/2} \mp m_{+2})(\Box^{1/2} \pm m_-)h_{pa}^{Tt(\pm)} = 0. \tag{3.28}$$

Veamos, sin embargo, que la energía del sistema no es definida positiva.

Al hacer la descomposición $2+1$, nos encontramos, al igual que en el caso que tratamos anteriormente, con que ω_{0a}, λ y h_{0a} son multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos

$$\varepsilon_{ij}\partial_i\omega_{j0} + \mu\omega_{ii} + \mu\lambda_{ii} = 0, \tag{3.29,a}$$

$$\varepsilon_{ij}\partial_i\omega_{jk} + \mu\omega_{k0} + \lambda_{k0} = 0, \tag{3.29,b}$$

$$-\varepsilon_{ij}\partial_i\lambda_{j0} + m^2 h_{ii} = 0, \tag{3.29,c}$$

$$\varepsilon_{ij}\partial_i\lambda_{jk} - m^2 h_{k0} = 0, \tag{3.29,d}$$

$$\omega_{ii} + \varepsilon_{ij}\partial_i\lambda_{j0} = 0, \tag{3.29,e}$$

$$\omega_{k0} + \varepsilon_{ij}\partial_i h_{jk} = 0, \tag{3.29,f}$$

de donde (con las descomposiciones (2.22) y (3.17))

$$\omega_{k0} = \varepsilon_{kj}\partial_j \Delta h^T + \partial_k(\Delta h^{TL} + V), \tag{3.30,a}$$

$$\lambda_{k0} = \frac{1}{\mu}[\varepsilon_{kj}\partial_j(\Delta\omega^T - \mu\Delta h^T) + \partial_k(\Delta\omega^{TL} + \\ + \partial_k(\Delta\omega^{TL} + \lambda - \mu\Delta h^{TL} - \mu V)], \tag{3.30,b}$$

$$h_{k0} = -\frac{1}{m^2}[\varepsilon_{kj}\partial_j \Delta\rho^T + \partial_k(\Delta\rho^{TL} + \rho)], \tag{3.30,c}$$

$$\Delta\omega^L = -\frac{\Delta^2}{m^2}\rho^T - \Delta\omega^T, \tag{3.30,d}$$

$$\Delta\rho^L = \frac{\Delta(\Delta - m^2)}{m^2}\rho^T + \frac{\Delta^2}{\mu}h^T, \tag{3.30,e}$$

$$\Delta h^L = \frac{-\Delta^2}{m^2\mu}\omega^T + (\frac{\Delta - m^2}{m^2})\Delta h^T. \tag{3.30,f}$$

Al sustituir (3.29) en la acción, tendremos

$$\begin{aligned} S_{(TM+FP)}\Big|_{(3.29)} = \frac{1}{2\mu}\Big\langle & \omega_{i0}\varepsilon_{ij}\dot{\omega}_{j0} - \omega_{ik}\varepsilon_{ij}\dot{\omega}_{jk} + 2\mu\lambda_{i0}\varepsilon_{ij}\dot{h}_{j0} + \\ & - 2\mu\lambda_{ik}\varepsilon_{ij}\dot{h}_{jk} + \mu(\omega_{ii}\omega jj - \omega_{ij}\omega_{ji}) + \\ & + 2\mu(\lambda_{ii}\omega jj - \lambda_{ij}\omega_{ji}) - m^2\mu(h_{ii}h_{jj} - h_{ij}h_{ji})\Big\rangle \\ = \frac{1}{\mu}\Big\langle & 2\mu\Delta\dot{h}^T\Delta\rho^{TL} + 2\Delta\dot{\omega}^T\Delta\omega^{TL} + 2\mu\Delta\dot{\rho}^T\Delta h^{TL} + \\ & - \mu\Delta\omega^T\Delta\omega^T + \mu\lambda\lambda + \mu\Delta\omega^{TL}\Delta\omega^{TL} + \\ & + 2\Delta h^T\Delta\Delta\omega^T - \mu\Delta h^T(\Delta - m^2)\Delta h^T + \\ & + m^2\mu\Delta h^{TL}\Delta h^{TL} - m^2\mu VV - \frac{\mu}{m^2}\Delta\rho^T\Delta\Delta\rho^T + \\ & - 2\mu\Delta\rho^T\Delta\omega^T + 2\mu\lambda\rho - 2\mu\Delta\omega^{TL}\Delta\rho^{TL}\Big\rangle, \end{aligned} \tag{3.31}$$

donde, entonces, λ, ρ y V aparecen como multiplicadores asociados a vínculos cuadráticos.

Su solución, $\lambda = V = \rho = 0$, la sustituimos y hacemos las redefiniciones

$$\sqrt{2}\Delta h^T = Q_1 \quad , \quad \sqrt{2}\Delta\rho^{TL} = P_1, \tag{3.32,a}$$

$$\sqrt{2}\frac{\Delta\omega^T}{\mu} = Q_2 \quad , \quad \sqrt{2}\Delta\omega^{TL} = P_2, \tag{3.32,b}$$

$$\sqrt{2}\frac{\Delta\rho^T}{m} = Q_3 \quad , \quad \sqrt{2}\Delta h^{TL}m = P_3. \tag{3.32,c}$$

Llegamos, así, finalmente a la forma reducida de $S_{(TM+FP)}$

$$\begin{aligned}
S^{(red)}_{(TM+FP)} = \Big\langle P_1\dot{Q}_1 + P_2\dot{Q}_2 + P_3\dot{Q}_3 + \frac{1}{2}P_1P_1 + \\
& - \frac{1}{2}(P_1 + P_2)^2 + \frac{1}{2}P_3P_3 - \frac{1}{2}Q_2(-\Delta)Q_2 + \\
& + \frac{1}{2}Q_3(-\Delta)Q_3 + \frac{1}{2}(Q_1 - Q_2)(-\Delta)(Q_1 - Q_2) + \\
& + \frac{1}{2}m^2Q_1Q_1 + \frac{1}{2}m^2Q_3Q_3 + \\
& - \frac{1}{2}(\mu Q_2 + mQ_3)^2\Big\rangle,
\end{aligned} \tag{3.33}$$

la cual muestra que la energía es no definida positiva.

Concluimos que tampoco podemos romper, consistentemente, las simetrías de $S^{2,l}_{TM}$, agregando un término de Fierz-Pauli.

Capítulo **VI**

COMPORTAMIENTO ANYÓNICO EN TEORÍAS VECTORIALES Y DE GRAVEDAD LINEALIZADA

PLanteamos en este capítulo la posibilidad de implementar spin y estadística fraccionaria en teorías acopladas con un campo electromagnético o con un campo gravitacional débil. Nuevamente aparece una estrecha analogía entre las teorías vectoriales y spin 2.

Desde otro punto de vista esta capítulo sirve también como un ejemplo de las teorías ya analizadas en presencia de fuentes externas.

1.- Spin y estadística en dimensión 2+1

En 3 dimensiones espaciales el grupo de rotaciones SO(3) es no abeliano. Así, cuando cuantizamos puede demostrarse que la componente del momento angular en la dirección de un eje fijo tiene autovalores que son múltiplos semienteros de $\hbar$. Para el spin, por ser un momento angular intrínseco, la situación es análoga. Decimos, cuando tomamos $\hbar = 1$, que el spin en 3 dimensiones espaciales, tiene valores semienteros o enteros. Además, las funciones de onda que representan estados de dos o mas partículas idénticas son simétricas o antisimétricas, respecto al "intercambio" de dos de estas si, respectivamente, su spin es entero o semientero.

En 2 dimensiones espaciales la situación es distinta. Las rotaciones planares se realizan alrededor de un eje común, por lo que no habrá reglas de conmutación no abelianas. Así, el momento angular, y por ende el spin, no está restringido a tomar valores que sean múltiplos de $1/2$. Esta posibilidad real de tener partículas con cualquier spin nos lleva a introducir el concepto de "anyon" (del ingles *any* = cualquiera) con el que identificamos a las partículas que posean spin que no sea entero o semientero. Respecto a la estadística, además de las usuales (fermiónica y bosónica) en 2 dimensiones espaciales tenemos la posibilidad de tener otro tipo de estadísticas. Esto aparece de manera natural si tomamos en cuenta la topología del espacio de configuraciones de n partículas idénticas [57,58,59].

Cuando un sistema clásico es cuantizado, es descrito por funciones de onda $\psi(q)$ sobre el espacio de configuraciones Q. La correspondencia entre los estados cuánticos del sistema y estas funciones de onda no es uno a uno, ya que la predictibilidad no cambia si multiplicamos la función de onda que representa un estado por un factor de fase. Si Q es simplemente conexo siempre es posible definir esta fase globalmente [58]. Cuando Q no es simplemente conexo esto no es posible hacerlo siempre.

La evolución del sistema viene dada por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\partial_t\psi = H_{op}\psi \tag{1.1}$$

donde H_{op} es el hamiltaniano del sistema. H_{op} es un operador local, así, cuando Q no es simplemente conexo podemos "levantarlo" unívocamente al espacio de recubrimiento universal $\widetilde{Q}$, de Q y hacer mecánica cuántica con funciones de onda univaluadas $\widetilde{\psi}(\widetilde{q})$ sobre $\widetilde{Q}$, quedando por resolver bajo que condiciones volvemos a Q.

Cuando tenemos a $\widetilde{Q}$, éste viene dado junto a un mapa de recubrimiento $\pi : \widetilde{Q} \to Q$. Además, el grupo fundamental de $Q, \pi_1(Q)$,

actúa libremente sobre $\widetilde{Q}$, y Q es el cociente de $\widetilde{Q}$ bajo esta acción

$$\frac{\widetilde{Q}}{\pi_1(Q)} = Q. \tag{1.2}$$

Se dice que $\widetilde{Q}$ es un fibrado principal sobre Q con grupo de estructura $\pi_1(Q)$. Esto puede aclararse si construimos explícitamente a $\widetilde{Q}$. Una manera de hacerlo es la siguiente [58,59]: Tomamos un punto $q_0 \in Q$ fijo y formamos el conjunto, $\mathcal{P}Q$, de todos los caminos que empiezan en q_0 y terminan en algun $q \in Q$. Llamemos a los elementos de $\mathcal{P}Q$, Γ_q. Sea $[\Gamma_q]$ la clase de equivalencia de todos los caminos homotópicos a Γ_q. Para cada punto q habrán varias clases $[\Gamma_q]$ asignadas. Puede probarse que

$$\widetilde{Q} = \{[\Gamma_q], q \in Q\}. \tag{1.3}$$

El grupo fundamental $\pi_1(Q)$ es el conjunto de las clases de equivalencia asociadas a q_0

$$\pi_1(Q) = \{[\Gamma_{q_0}], q_0 \in Q \text{ fijo}\}. \tag{1.4}$$

La estructura de grupo emerge si definimos el producto entre clases

$$[\Gamma_{q_0}][\Gamma'_{q_0}] = [\Gamma_{q_0} \cup \Gamma'_{q_0}], \tag{1.5,a}$$

donde $\Gamma_{q_0} \cup \Gamma'_{q_0}$ se entiende como el camino, cerrado, que resulta de recorrer Γ_{q_0} y luego Γ'_{q_0}. El inverso de cada elemento es la clase de equivalencia

$$[\Gamma_{q_0}]^{-1} \equiv [\Gamma_{q_0}^{-1}], \tag{1.5,b}$$

donde $\Gamma_{q_0}^{-1}$ es Γ_{q_0} recorrido en sentido inverso. La identidad son todos los caminos homotópicos a q_0

$$e = [\Gamma_{q_0}][\Gamma_{q_0}]^{-1} = \text{“}q_0\text{”}. \tag{1.5,c}$$

La acción de $\pi_1(Q)$ sobre $\widetilde{Q}$ viene dada por

$$[\Gamma_{q_0}] \to [\Gamma_{q_0}][\Gamma_q] \equiv [\Gamma_{q_0} \cup \Gamma_q]. \tag{1.6}$$

El mapa de recubrimiento es

$$\pi : \widetilde{Q} \to Q;\ \ \pi([\Gamma_q]) = q. \tag{1.7}$$

Observamos que $\pi^{-1}(q)$ son puntos que difieren por una acción de $\pi_1(Q)$. Así, todo lazo γ sobre algún punto $q \in Q$ se levanta como un camino, $\widetilde{\gamma}$, en $\widetilde{Q}$ que empieza y termina en la fibra $\pi^{-1}(q)$.

$\widetilde{Q}$ puede descomponerse en la unión de "dominios fundamentales" [57,59], cada uno de los cuales es isomorfo a Q. Estos contienen una y sólo una preimagen de cada punto $q \in Q$ y podemos pasar de un dominio fundamental a otro por la acción de $\pi_1(Q)$ sobre $\widetilde{Q}$. Definimos,ahora, una función de onda multivaluada $\psi(q)$ que toma los valores $\widetilde{\psi}([\gamma]\widetilde{q})$, donde $[\gamma]$ recorre todo $\pi_1(Q)$. Si queremos que para dos puntos $\widetilde{q}$ y $\widetilde{q}'$ en la fibra de q, $\widetilde{\psi}(\widetilde{q})$ y $\widetilde{\psi}(\widetilde{q}')$ tengan la misma predictibilidad física, entonces

$$\widetilde{\psi}([\gamma]\widetilde{q}) = a([\gamma])\widetilde{\psi}(\widetilde{q}), \qquad \forall \widetilde{q} \in \widetilde{Q} \tag{1.8}$$

donde $|a([\gamma])| = 1$, para todas las $[\gamma] \in \pi_1(Q)$. Puede probarse que $a([\gamma])$ es una representación unitaria unidimensional de $\pi_1(Q)$. Tenemos entonces que se induce una acción de $\pi_1(Q)$ sobre $\psi(q)$ en el sentido que si movemos a q sobre un lazo γ en Q las funciones de onda difieren por la fase $a([\gamma])$.

Finalmente, debido a que el principio de superposición se cumple entre funciones de onda que adquieren el mismo $a([\gamma])$ por la acción de $\pi_1(Q)$, tendremos distintos sectores en el espacio de Hilbert de estados caracterizados por el factor $a([\gamma])$ que adquieren las funciones de onda $\psi(q)$ al mover q sobre un lazo γ en Q [57]. Cuando Q es el espacio de configuraciones de n partículas idénticas M_n, la acción de $\pi_1(M_n)$ sobre las funciones de onda corresponde justamente a hacer un intercambio. Veamos entonces como es M_n [60-63].

Consideramos n partículas idénticas en $\mathcal{R}^d$. En principio tendremos que

$$M_n \subset \underbrace{\mathcal{R}^d \times \mathcal{R}^d \times \cdots \times \mathcal{R}^d}_{n-veces} \equiv \mathcal{R}^{nd}. \tag{1.9}$$

La indistinguibilidad se hace presente si tomamos el cociente de $\mathcal{R}^{nd}$ por la acción del grupo simérico S_n. Además pediremos que las partículas no colisionen. Esto corresponde a eliminar todos los puntos diagonales de $\mathcal{R}^{nd}$, (i.e.)

$$\Delta \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \overrightarrow{r}_1, \cdots, \overrightarrow{r}_n \in \mathcal{R}^d \quad t.q. & \overrightarrow{r}_i = \overrightarrow{r}_j \text{ para al} \\ & \text{menos un par } (i,j) \text{ con } i \neq j. \end{array} \right\} \tag{1.10}$$

Así, tomamos [60,61]

$$M_n = \frac{(\mathcal{R}^{nd} - \Delta)}{S_n}. \tag{1.11}$$

Nos interesa como es $\pi_1(M_n)$. Para $d \geq 3$ resulta que [60,61] $\pi_1(M_n) = S_n$.

Si definimos σ_i como el operador abstracto que efectúa el intercambio del objeto i con el $i+1$, en un arreglo de n objetos, resulta que todo elemento de S_n es generado por 1, $\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}$, donde 1 representa la identidad de S_n. Estos generadores verifican

$$\sigma_i^2 = 1, \tag{1.12,a}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad si \quad |i-j| \geq 2, \tag{1.12,b}$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}. \tag{1.12,c}$$

Nos interesa las representaciones unitarias de S_n. Le asignamos una fase $e^{-i\theta_j}$ a cada σ_j. La propiedad (1.12,c) no dice que $\theta_i = \theta_{i+1} = \theta$. Luego (1.12,a) implica que $2\theta = 2k\pi$, con k entero. Así $\theta = 0$ ó π (mod 2π). Para $g \in S_n$

$$a([g]) = 1 \qquad \forall g, \tag{1.13,a}$$

o

$$a([g]) = \pm 1 \;\; \text{dependiendo si la permutación es par o impar.} \tag{1.13,b}$$

Para dimensión espacial 2, sucede que [10,57,58] $\pi_1(M_n) = B_n$, donde B_n se le conoce como el grupo de trenzas (braid group).

Este puede definirse, al igual que S_n en términos de la identidad y las σ_i's, salvo que no verifican (1.12,a). Por lo tanto para B_n

$$a([g]) = e^{(i\theta \sum_k \varepsilon_k)}, \tag{1.14}$$

donde ε_k es $+1$ ó -1 dependiendo de la ocurrencia, respectivamente, de σ_i o σ_i^{-1}.

Tenemos, por tanto, que la acción de $\pi_1(M_n)$ sobre las funciones de onda es $d \geq 3$

$$\psi \to \begin{cases} \psi & \text{,estadística de Bose-Einstein} \\ \pm\psi & \text{,estadística de Fermi-Dirac,} \end{cases} \tag{1.15}$$

y en $d = 2$

$$\psi \to a([g])\psi, \text{con } a(g) \quad \text{como en (1.14).} \tag{1.16}$$

Observamos en $d \geq 3$ la ocurrencia natural de las estadísticas usuales. En $d = 2$ si $\theta = 0$ o π tendremos la estadística bosónica o fermiónica y en otro caso tenemos una estadística no usual que suele llamarse “fraccionaria”.

En 2 dimensiones espaciales, si miramos el intercambio como un suceso que ocurre en determinado intervalo de tiempo, el ángulo entre la posición relativa de 2 partículas barre, en caso de haber intercambio, un ángulo de π o $-\pi$. Así, podemos reescribir $a(g)$ como [61]

$$a([g]) = e^{\frac{-i\theta}{\pi} \sum_{ij} \Delta\phi_{ij}} \tag{1.17}$$

donde $\Delta\phi_{ij}$ es el cambio angular del vector relativo entre las partículas i y j.

2.- Implementación dinámica de la estadística fraccional

La amplitud de transición entre dos configuraciones de un sistema, usando la formulación de Feynman para la mecánica cuántica, es (cuando Q es simplemente conexo)

$$K(q', t'; q, t) = \int \mathcal{D}q e^{iS/\hbar}, \tag{2.1}$$

donde S es la acción clásica y $\mathcal{D}q$ denota que la suma se hace sobre todas las trayectorias posibles, α, entre q y q'. Si Q no es simplemente conexo debemos ir a $\widetilde{Q}$ y al volver resulta que esta amplitud será la suma ponderada [59,62-64]

$$K(q't';q,t) = \sum_{[\gamma]\in\pi_1(Q)} a([\gamma])K_\gamma(q',t';q,t), \tag{2.2}$$

donde K_γ es el propagador parcial sobre todos los caminos α etiquetados por $[\gamma]$. Para esto último definimos un conjunto de caminos standards, Γ_q, desde un punto fijo q_0 a todos los puntos de Q. Luego construimos el camino cerrado $\Gamma_q\alpha\Gamma_{q'}^{-1}$ el cual pertenece a alguna de las clases de equivalencia $[\gamma]$ de $\pi_1(Q)$. La libertad para escoger q_0 y el hecho de que $K(q'',t'';q',t')\ K(q',t';\ q,t) = K(q'',t'';q,t)$ nos lleva a la conclusión que $a([\gamma])$, al igual que en (1.8), es una representación de $\pi_1(Q)$.

En $\widetilde{Q}$ la ley de propagación de las funciones $\widetilde{\psi}(\widetilde{q})$ se realiza integrado sobre uno de los dominios fundamentales

$$\widetilde{\psi}(\widetilde{q}') = \int_F \Big[\sum_{[\gamma]\in\pi_1(Q)]} \widetilde{K}(\widetilde{q}',t';[\gamma]\widetilde{q},t)a[\gamma]\Big]\widetilde{\psi}(\widetilde{q})d\widetilde{q} \tag{2.3}$$

lo cual es equivalente a integrar sobre todo $\widetilde{Q}$. Es preciso, por consistencia, que $\widetilde{\psi}([\gamma]\widetilde{q}) = a[\gamma]\widetilde{\psi}(\widetilde{q})$ siempre, esto es, debe ser propagada por (2.3). Así $\widetilde{K}([\gamma]\widetilde{q}',\ t';[\widetilde{\gamma}]q,t) = K(\widetilde{q}',t';q,t)$ y $\widetilde{\psi}([\gamma']\widetilde{q}') = a[\gamma']\psi(\widetilde{q}')$ en (2.3). Tenemos, por tanto, que las funciones de onda evolucionan dentro de un mismo sector del espacio de Hilbert.

Pensando en el espacio de configuraciones, de dos partículas idénticas en el plano, y teniendo en cuenta (1.17) el factor $a([\gamma])$ en (2.2) puede reescribirse como

$$a([\gamma]) = e^{\left(\frac{-i\theta}{\pi}\int_{[\gamma]} d\Phi\right)} \tag{2.4}$$

donde Φ es el ángulo del vector posición relativo entre las partículas con respecto a una dirección fija. Introduciendo (2.4) en (2.2), la

parte correspondiente a los caminos standards Γ_q y $\Gamma_{q'}$ contribuye como un factor de fase global [61], así la parte relevante que queda es

$$K'(q',t';q,t) = \int \mathcal{D}q e^{i\overline{S}/\hbar} \tag{2.5a}$$

con

$$\overline{S} = \int_t^{t'} dt \Big[\mathcal{L} - \frac{\theta}{\pi}\frac{d\Phi}{dt}\Big] \tag{2.5,b}$$

Tenemos así que la adición de este término a la acción determina la estadística sin afectar las ecuaciones clásicas de movimiento.

La última discusión sugiere que consideremos la mecánica cuántica de dos partículas idénticas con el término de interacción [65]

$$L_i = \frac{\theta}{\pi}\int \dot{\Phi} dt, \tag{2.6}$$

donde θ es un parámetro numérico, llamado parámetro estadístico. En el sentido de (1.7): θ es 0 ó π si queremos considerar, respectivamente, 2 bosones o 2 fermiones, y otros valores si queremos considerar anyones.

El término de interacción puede reescribirse como

$$L_I = \int q \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}_{rel}) \cdot \frac{d\overrightarrow{r}_{rel}}{dt} dt, \tag{2.7}$$

donde

$$A_i(\overrightarrow{r}_{rel}) = -\frac{\theta}{\pi q}\varepsilon_{ij}\partial_j \ln r_{rel}, \tag{2.8}$$

que corresponde a un punto de flujo en el origen del sistema de referencia relativo. Esto pues $B = \varepsilon_{ij}\partial_i A_j = \frac{2\theta}{q}\delta(\overrightarrow{r}_{rel})$. El flujo del “campo magnético” B es $\Phi = \frac{2\theta}{q}$. Desde este punto de vista cada partícula “ve” a la otra como un punto de flujo magnético. En este cuadro podemos decir que los anyones se comportan como partículas con carga ficticia q y flujo Φ, relacionados por el vínculo $2\theta = q\Phi$. Pensando en la situación que se presenta cuando se estudia el efecto Aharanov-Bohm, la fase que adquiriría la función de onda

de una partícula que rodee al punto de flujo sería $q\Phi$. Definimos entonces

$$\alpha \equiv q \oint dx^i A_i, \tag{2.9}$$

como el "parámetro de comportamiento anyónico", el cual usaremos en las siguientes secciones. Su relación con el parámetro estadístico es

$$\theta = \frac{\alpha}{2}. \tag{2.10}$$

3.- Comportamiento anyónico en teorías vectoriales

3.1.- Teoría de CS pura y la TM vectorial

Partimos de la acción

$$S = S_{part} + S_{CS} + < a_m J^m >, \tag{3.1}$$

donde la acción de la partícula es la usual

$$S_{part} = -m \int ds, \tag{3.2,a}$$

y

$$S_{CS} = -\frac{\mu}{2} < \varepsilon^{mnl} a_m \partial_n a_l >, \tag{3.2,b}$$

que corresponde al término de CS. J^m es una corriente conservada. En el límite no relativista el lagrangiano $L_{part} + a_m J^m$ puede verse como el usual $\frac{1}{2}mv^2 + a_m v^m q$, si $J^m =< q\dot{x}^m \delta(x - x(\tau)) >$. La ecuación de movimiento para a_m es

$$\mu\varepsilon^{mnl}\partial_n a_l = J^m. \tag{3.3}$$

La componente cero de (3.3) constituye el vínculo

$$\mu B - J^0 = 0, \tag{3.4}$$

donde $B \equiv \varepsilon_{ij}\partial_i a_j$ es el "campo magnético". Cuando J^m corresponde a una carga q

$$q = \mu\Phi, \tag{3.5}$$

donde Φ es el flujo del campo magnético. Tenemos así la típica relación vincular del modelo anyónico, vista en la sección anterior. Además, como J^0 es nulo en todas partes salvo en la posición de la partícula, $B = F_{12} = 0$, lo que indica que a_i es puro calibre, y que la partícula es efectivamente un punto de flujo. El parámetro de comportamiento anyónico es

$$\begin{aligned} \alpha_{CS} = q \oint dx^i a_i &= q\Phi \\ &= \frac{q^2}{\mu}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

que corresponderá al parametro estadístico

$$\theta = \frac{q^2}{2\mu}. \tag{3.7}$$

Estos resultados se verifican cuando buscamos las soluciones estáticas para a_i y calculamos α [29,30]. Si a la acción (3.1) le sumamos la acción de Maxwell, asintóticamente el término dominante es el de CS. El vínculo (3.4) es ahora la ley de Gauss modificada

$$\partial_i E^i - \mu B = -J^0. \tag{3.8}$$

Como el campo eléctrico cumple la ec. de Klein-Gordon con masa μ, éste decae con r como $r^\alpha e^{-\mu r}$, donde α es alguna potencia. Así $\int_{R^2} d^2x \partial_i E^i = 0$, y entonces al integrar sobre todo el espacio se sigue verificando (3.5).

Las ecuaciones de movimiento para a_m cuando el término de Maxwell está presente son

$$\partial_m F^{mn} - \mu \varepsilon^{nml} \partial_m a_l = -J^n, \tag{3.9}$$

donde en el límite en que μ es muy grande recuperamos la teoría de CS pura. Como deseamos comparar con el caso gravitacional, tomamos como corriente J^m a

$$J^0 = q\delta^{(2)}(\overrightarrow{r}), \;\; J^i = g\varepsilon_{ij}\partial_j \delta^{(2)}(\overrightarrow{r}), \tag{3.10}$$

que corresponde a una carga q en el origen, con momento magnético dipolar g*. Tomamos el ansatz

$$a_0 = a(r), \;\; a_i = \varepsilon_{ij}\partial_j V(r) + \partial_i \lambda(r). \tag{3.11}$$

Podemos escoger $\lambda(r) = 0$. Así el sistema (3.9), queda como

$$\Delta a - \mu \Delta V = q\delta^{(2)}(\overrightarrow{r}) \qquad (3.12,a)$$

$$\Delta V - \mu a = -g\delta^{(2)}(\overrightarrow{r}) \qquad (3.12,b)$$

que podemos desacoplar sin ningún problema

$$(-\Delta)(-\Delta + \mu^2)V = (\mu q + g(-\Delta))\delta^{(2)}(\overrightarrow{r}), \qquad (3.13,a)$$

$$(-\Delta + \mu^2)a = -(q - \mu g)\delta^{(2)}(\overrightarrow{r}). \qquad (3.13,b)$$

Este sistema lo resolvemos usando las funciones de Green de Yukawa y Coulomb, $Y(\mu r)$ y $C(\mu r)$, que verifican

$$(-\Delta + \mu^2)Y(\mu r) = \delta^{(2)}(\overrightarrow{r}), \qquad (3.14,a)$$

$$(-\Delta)C(\mu r) = \delta^{(2)}(\overrightarrow{r}), \qquad (3.14,b)$$

donde

$$Y(\mu r) = \frac{1}{2\pi} K_0(\mu r), \qquad (3.15,a)$$

$$\mathcal{C}(\mu r) = -\frac{1}{2\pi} \ln(\mu r). \qquad (3.15,b)$$

$K_0(\mu r)$ es la función de Bessel modificada de orden 0. En $C(\mu r)$, μ puede cambiarse por cualquier constante con dimensiones de masa sin alterar (3.14,b), la función de esta constante es que el argumento del logaritmo sea adimensionado. La solución al sistema es

$$a(r) = -(q - \mu g)Y(\mu r), \qquad (3.16,a)$$

$$V(r) = -\frac{(q - \mu g)}{\mu} Y(\mu r) + \frac{q}{\mu} C(\mu r). \qquad (3.16,b)$$

---

*En 3 dimensiones espaciales podemos definir el momento magnético como $\overrightarrow{m} = \frac{1}{2} I \int \overrightarrow{r} \times d\overrightarrow{l}$, haciendo la identificación $Id\overrightarrow{l} \rightarrow \overrightarrow{J}\,dV$ tendremos, entonces, que $\overrightarrow{m} = \int \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{J}\,dV$. "Traduciendo" este concepto a 2 dimensiones espaciales "$\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{J}$" $= \varepsilon_{ij} x^i J^j$. Obteniendo con (3.10) "$\overrightarrow{m}$" $= g$.

La solución del sistema (3.13) en el limite de μ grande (que corresponde a la teoría de CS pura) es $a(r) = (g/\mu)\delta^{(2)}(\overrightarrow{r})$, $V(\overrightarrow{r}) = (q/\mu)\mathcal{C}(r)$, que cuando $g = 0$ corresponde a un punto de flujo con el comportamiento anyónico planteado. Cuando $g \neq 0$, α_{CS} no cambia y $F_{mn} = 0$ fuera de la posición de la partícula.

Cuando el término de Maxwell está presente, usando el hecho de que asintóticamente $K_0(x) \sim x^{-1/2}e^{-x}$, tenemos que cuando $\mu r >> 0$

$$a_0 \sim 0, \;\; a_i \sim \frac{q}{\mu}\varepsilon_{ij}\partial_j C(\mu r), \tag{3.17}$$

al igual que la teoría de CS pura. El parámetro de comportamiento anyónico es para un círculo de radio R

$$\alpha_{TM}(R) = \frac{q^2}{\mu} - q(q - \mu g)RK_1(\mu r), \tag{3.18}$$

el cual tiende a α_{CS} cuando $R \to \infty$, como es de esperarse. En el caso particular en que $q - \mu g = 0$ resulta que $\alpha_{TM} = \alpha_{CS}$ para cualquier contorno y las soluciones coinciden en las regiones externas a la fuente.

3.2.- Las teorías autodual y TM, y el problema de los aclopamientos no minimales

Se ha dicho que cuando hay rotura espontánea de simetría, se pierde el comportamiento anyónico [32,33]. De hecho si consideramos la teoría de CS pura con un término adicional de la forma $-m^2 a_r a^r$, que podría venir de algún proceso de rotura espontánea de simetría, la acción del campo a_m corresponde a la teoría autodual con masa $m_{_{AD}} = m^2/|\mu|$. La ecuación (3.3) sería ahora

$$\mu\varepsilon^{mnl}\partial_n a_l + m^2 a^m = J^m. \tag{3.19}$$

Si tomamos J^m como en (3.10) y el ansatz (3.11), es inmediato

obtener

$$a_{AD}(r) = -\frac{m_{_{AD}}}{\mu}(q + m_{_{AD}}g)Y(m_{_{AD}}r) + \frac{q}{\mu}\delta^{(2)}(\overrightarrow{r}), \tag{3.20,a}$$

$$V_{AD}(r) = (\frac{m_{_{AD}}g + q}{\mu})Y(m_{_{AD}}r), \tag{3.20,b}$$

$$\lambda_{AD}(r) = 0, \tag{3.20,c}$$

donde el argumento de la función de Green de Yukawa se corresponde con la masa de las excitaciones. En el caso particular en que $q + m_{_{AD}}g = 0$ tendremos que $F_{mn} = 0$. El parámetro de comportamiento anyónico para un círculo de radio R es

$$\alpha_{AD}(R) = \frac{q(q + m_{_{AD}}g)}{\mu}m_{_{AD}}RK_1(m_{_{AD}}R), \tag{3.21}$$

que tiende a cero cuando $R \to \infty$, y es idénticamente cero $q+m_{_{AD}}g = 0$.

En vista del equivalente entre las teorías S_{TM} y S_{AD} nos preguntamos si será posible algún acoplamiento no minimal que reproduzca en una teoría las soluciones de la otra. La respuesta a esta pregunta es afirmativa.

Tomemos primero la teoría de CS con el término de Maxwell (la TM) con un acoplamiento no minimal que corresponda a tomar J^m en (3.9) como

$$\widetilde{J}^m = \frac{1}{\mu}\varepsilon^{mnl}\partial_m J_l \tag{3.22}$$

y J_l como en (3.10). Las soluciones estáticas serán

$$\widetilde{a}_{TM}(r) = -(q - \mu g)Y - \frac{g}{\mu}\delta^{(2)}(\overrightarrow{r}), \tag{3.23,a}$$

$$\widetilde{V}_{TM}(r) = -\frac{1}{\mu}(q - \mu g)Y(\mu r), \tag{3.23,b}$$

y tomamos $\widetilde{\lambda}_{TM} = 0$ como elección de calibre (lo cual es posible tomando estático al parámetro de la transformación de calibre). Observamos que (3,23) corresponde a tomar $\mu \to -\mu$ y $m^2 \to \mu^2$ en (3.20). Así cuando tengo la teoría TM acoplada no minimalmente

($\sim a_m \varepsilon^{mnl} \partial_n J_l$), las soluciones estáticas corresponden a las de la teoría AD con acoplamiento minimal.

Recíprocamente tomemos la teoría de CS con el término de rotura de simetría (la AD) con el acoplamiento no minimal, que corresponde a resolver (3.19) con J^m como

$$\widetilde{J}^m = m_{_{AD}} \varepsilon^{mnl} \partial_n \mathcal{G}_l, \tag{3.24,a}$$

donde

$$\mathcal{G}^0 = qC(m_{_{AD}} r), \ \ \mathcal{G}^i = g\varepsilon_{ij} \partial_j C(m_{_{AD}} r), \tag{3.24,b}$$

que corresponde a $\mathcal{G}^m = (-\Delta)^{-1} J^m$, con J^m como en (3.10). Las soluciones estáticas correspondientes, resultan ser

$$\widetilde{a}_{AD}(r) = -\frac{m_{_{AD}}}{\mu}(q + m_{_{AD}} g) Y(m_{_{AD}} r) \tag{3.25,a}$$

$$\widetilde{V}_{AD}(r) = (\frac{q + m_{_{AD}} g}{\mu}) Y(m_{_{AD}} r) - \frac{q}{\mu} C(m_{_{AD}} r), \tag{3.25,b}$$

$$\widetilde{\lambda}_{AD}(r) = 0. \tag{3.25,c}$$

Estas soluciones corresponden a las de la topológica masiva si tomamos $m_{_{AD}} \to -\mu$, $\mu \to -\mu$. El parámetro de comportamiento anyónico es, para un círculo de radio R

$$\widetilde{\alpha}_{AD}(R) = -\frac{q^2}{\mu} + q\frac{(q + m_{_{AD}} g)}{\mu} m_{_{AD}} R K_1(m_{_{AD}} R), \tag{3.26}$$

donde para el caso en que $q + m_{_{AD}} g = 0$, es igual al de la teoría de CS pura con parámetro $-\mu$. Es importante recalcar que en este caso particular como asintóticamente el parámetro de comportamiento anyónico no depende de m.

El punto que no queda claro es cuál será el significado físico de (3.24).

3.3.- La teoría de Hagen

Para la teoría de Hagen (ver capítulo II), las ecuaciones del campo a_m serán

$$\partial_m F^{nm} - \widetilde{\mu} \varepsilon^{mnl} \partial_n a_l = -\frac{1}{(1-\lambda)^2}((1-\lambda) J^m + \frac{\lambda}{\widetilde{\mu}} \varepsilon^{mnl} \partial_n J_l), \tag{3.27}$$

donde $\widetilde{\mu} = \mu/(1-\lambda)$. Tomamos J^m como en (3.10), y las soluciones estáticas son

$$a_H(r) = -\frac{1}{(1-\lambda)^2}(q - \widetilde{\mu}g)Y(\widetilde{\mu}r), \tag{3.28,a}$$

$$V_H(r) = -\frac{1}{(1-\lambda)^2}\frac{(q-\widetilde{\mu}g)}{\widetilde{\mu}}Y(\widetilde{\mu}r) + \frac{q}{(1-\lambda)\widetilde{\mu}}C(\widetilde{\mu}r). \tag{3.28,b}$$

El parámetro de comportamiento anyónico, para un círculo de radio R es

$$\alpha_H(R) = \frac{q^2}{\mu} - \frac{q}{(1-\lambda)^2}(q - \widetilde{\mu}g)RK_1(\widetilde{\mu}R). \tag{3.29}$$

Observamos que cuando $\lambda \to 0$ tienden uniformemente a las soluciones correspondientes de la teoría TM. Para el parámetro de comportamiento anyónico sucede lo mismo. Sin embargo es de notar que tanto asintóticamente, como en el caso particular, $q - \widetilde{\mu}g = 0$, el parámetro no depende de λ. Esto último esta en correspondencia con el hecho de que asintóticamente el término dominante es el de CS.

4.- Comportamiento anyónico en teorías de gravedad linealizada

4.1.- La posibilidad de tener anyones gravitacionales

La acción de una partícula libre en un campo gravitacional es

$$S_p = -m\int d\tau(-g_{mn}\frac{dx^m}{d\tau}\frac{dx^n}{d\tau})^{1/2}. \tag{4.1}$$

Cuando tomamos la aproximación de campo débil (o linealizamos) $g_{mn} = \eta_{mn} + \kappa h_{\overline{mn}}$ obtenemos

$$\begin{aligned} S_p^l = -m\int d\tau(-\eta_{mn}\frac{dx^m}{d\tau}\frac{dx^n}{d\tau})^{1/2}+ \\ + \frac{\kappa}{2}\int d^3x h_{\overline{mn}}(x)T^{mn}(X), \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde

$$T^{mn}(X) = m\frac{dx^m}{dt}\frac{dx^n}{dt}\frac{dt}{d\tau}\delta^{(2)}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{X}(t)). \tag{4.3}$$

Si pasamos al límite no relativista de (4.2), tendremos

$$S_p^{l(nr)} = \frac{1}{2}m\int dt\dot{X}^2 + \frac{\kappa m}{2}\int dth_{00}(X) + \kappa m\int dth_{0i}(X)\dot{X}^i, \tag{4.4}$$

que es igual a la acción de una partícula en un campo electromagnético, si hacemos la identificación [26,27]

$$\kappa m h_{\overline{0i}} \to qa_i, \quad \frac{1}{2}\kappa m h_{\overline{00}} \to qa_0. \tag{4.5}$$

Este resultado nos induce a pensar en la posibilidad de implementar dinámicamente estadísticas anyónicas en el contexto de teorías de gravedad linealizada. Esto fué presentado originalmente por Deser [29,30], con la teoría de gravedad topológica masiva linealizada. Sin embargo, veremos en la próxima subsección que con la teoría TM no se logra una generalización uniforme de los resultados para teorías vectoriales [66]. La razón es que el término topológico linealizado es de tercer orden y por lo tanto no domina sobre el de Einstein asintóticamente.

El efecto del término de CS vectorial se generaliza para teorías de gravedad linealizada con el término de CS triádico (TCS) [66]. Consideremos, entonces, la acción

$$S = -m\int ds + S_{TCS} + \kappa < h_{mn}T^{mn} >, \tag{4.6}$$

donde al linealizar la acción de la partícula (4.1) hemos partido con la métrica en función de los dreibeins

$$g_{mn} = e_m{}^a e_n{}^b \eta_{ab}, \tag{4.7}$$

y linealizamos los dreibeins, $e_p{}^a = \delta_p{}^a + \kappa h_p{}^a$, lo cual produce el acoplamiento $\kappa h_{mn}T^{mn}$ con T^{mn} simétrico. La relación entre $h_{\overline{mn}}$ y h_{mn} es

$$h_{\overline{mn}} = h_{mn} + h_{nm}. \tag{4.8}$$

En (4.6) S_{TCS} es

$$S_{TCS} = \frac{\mu}{2} < h_{pa}\varepsilon^{prs}\partial_r h_s{}^a > . \tag{4.9}$$

Tomamos como fuente, T^{mn}

$$T^{00} = m\delta^{(2)}(\overrightarrow{r}), \quad T^{0i} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon_{ij}\partial_j\delta^{(2)}(\overrightarrow{r}), \quad T^{ij} = 0, \tag{4.10}$$

que corresponde a una partícula con masa m y momento angular intrínseco σ $(\int d^2xT^{00} = m, \int d^2\varepsilon_{ij}x^iT^{0j} = \sigma)$. Si hacemos la descomposición $T + L$ de h_{mn}

$$h_{00} = n(r), \tag{4.11,a}$$

$$h_{0i} = \varepsilon_{ij}\partial_j(n^T - v^L) + \partial_i(n^L + v^T), \tag{4.11,b}$$

$$h_{i0} = \varepsilon_{ij}\partial_j(n^T + v^L) + \partial_i(n^L - v^T), \tag{4.11,c}$$

$$h_{ij} = (\delta_{ij}\Delta - \partial_i\partial_j)h^T + (\varepsilon_{i\kappa}\partial_\kappa\partial_j + \varepsilon_{j\kappa}\partial_\kappa\partial_i)h^{TL} + \partial_i\partial_jh^L + \varepsilon_{ij}V, \tag{4.11,d}$$

las ecuaciones de movimiento para las h_{mn} son

$$\mu\varepsilon^{prs}\partial_r{h_s}^n = -\kappa T^{pn}, \tag{4.12}$$

La componente 00 de (4.12) es el vínculo

$$\mu\varepsilon_{ij}\partial_ih_{j0} = \kappa T^{00}, \tag{4.13}$$

que constituye la generalización del vínculo (3.4), como veremos. En función de las componentes T+L, (4.12) queda como

$$(-\Delta)(n^T + v^L) = \frac{\kappa m}{\mu}\delta(\overrightarrow{r}), \tag{4.14,a}$$

$$\varepsilon_{ij}\partial_j\Delta h^T + \partial_i(\Delta h^{TL} + V) = \frac{\kappa\sigma}{2\mu}\varepsilon_{ij}\partial_j\delta(\overrightarrow{r}), \tag{4.14,b}$$

$$n = \frac{\kappa\sigma}{2\mu}\delta(\overrightarrow{r}), \tag{4.14,c}$$

$$(\delta_{ij}\Delta - \partial_i\partial_j)(n^T - v^L) + \frac{1}{2}(\varepsilon_{ij}\partial_j\partial_\kappa + \varepsilon_{\kappa j}\partial_j\partial_i)(n^L - v^T) + \\ + \frac{1}{2}\varepsilon_{i\kappa}\Delta(n^L - v^T) = 0. \tag{4.14,d}$$

Para resolver (4.14), notamos que si hacemos una transformación de calibre estática , n, $n^T - v^L$, $n^L + v^T$, $n^T + v^L$ y h^T son invariantes, y

$$\delta h^L = \xi^L,\ \delta h^{TL} = \frac{1}{2}\xi^T,\ \delta V = -\frac{1}{2}\Delta\xi^T,\ \delta(n^L - V^T) = \xi, \tag{4,15}$$

donde $\xi_0 = \xi$, $\xi_i = \partial_i \xi^L + \varepsilon_{ij}\partial_j \xi^T$ y $\delta h_{mn} = \partial_m \xi_n$. Fijamos el calibre $h^{TL} = 0$, $h^L = h^T$ y tendremos

$$h_{00}(r) = \frac{K\sigma}{2\mu}\delta(\overrightarrow{r}), \tag{4.16,a}$$

$$h_{0i}(r) = 0, \tag{4.16,b}$$

$$h_{i0}(r) = \frac{\kappa m}{\mu}\varepsilon_{ij}\partial_j C(\mu r), \tag{4.16,c}$$

$$h_{ij}(r) = \frac{\kappa\sigma}{2\mu}\delta_{ij}\delta(\overrightarrow{r}). \tag{4.16,d}$$

La comparación con los casos vectoriales es a través de los $h_{\overline{mn}}$ de la linealización de la métrica. Así con (4.8)

$$h_{\overline{00}}(r) = \frac{\kappa\sigma}{\mu}\delta(\overrightarrow{r}), \tag{4.17,a}$$

$$h_{\overline{0i}}(r) = \frac{\kappa m}{\mu}\varepsilon_{ij}\partial_j \mathcal{C}(\mu r), \tag{4.17,b}$$

$$h_{ij}(r) = \frac{\kappa\sigma}{\mu}\delta_{ij}\delta(\overrightarrow{r}). \tag{4.17,c}$$

Luego de hacer la identificación $\kappa\sigma \to g$ y $\kappa m \to q$, notamos que $h_{\overline{00}}$ y $h_{\overline{0i}}$ corresponden a las soluciones para a_0 y a_i en el sistema vectorial de CS puro (ecuación (3.12) en el límite μ muy grande). El parámetro de comportamiento anyónico será.

$$\alpha_{TCS} \equiv \kappa m \oint dx^i h_{\overline{0i}} = \frac{(\kappa m)^2}{\mu}, \tag{4.18}$$

independientemente del contorno que escojamos. Este resultado es la generalización uniforme del obtenido para la teoría vectorial correspondiente.

4.2.- El parámetro de comportamiento anyónico para la teoría VCS linealizada y la TM linealizada

Visto el resultado obtenido para la teoría TCS pura, miramos la teoría que resulta de agregar la acción de Einstein linealizada a (4.6) [66]. Este será el análogo a cuando tenemos el término

de Maxwell presente, para el caso vectorial. Las soluciones deben coincidir asintóticamente ya que en este límite dominará S_{TCS}.

Las ecuaciones de movimiento para h_{mn} son ahora las correspondientes a la teoría VCS linealizada con la fuente (4.10)

$$(\frac{1}{2}\varepsilon^{pmn}\varepsilon^{srl} - \varepsilon^{pml}\varepsilon^{srn})\partial_m\partial_r h_{sl} + \mu\varepsilon^{prs}\partial_s h_r{}^n = -\kappa T^{pn}. \tag{4.19}$$

La componente 00 es el vínculo

$$(\delta_{ij}\Delta - \partial_i\partial_j)h_{ij} - \mu\varepsilon_{ij}\partial_i h_{j0} = -\kappa T^{00}. \tag{4.20}$$

Al integrar (4.20) sobre todo el plano da la misma relación entre κm y el flujo de $\varepsilon_{ij}\partial_i h_{j0}$ que se obtiene en (4.13). Esto se debe, al igual que en el caso vectorial, a que asintóticamente Δh^T va como $r^\alpha e^{-\mu r}$ por lo que no contribuye.

Haciendo la misma descomposición que (4.11), las ecuaciones se transforman en

$$\Delta^2 h^T + \mu\Delta(n^T + v^L) = -\kappa m\delta^{(2)}(\overrightarrow{r}), \tag{4.21,a}$$

$$-\Delta n^T - \mu\Delta h^T = -\frac{\kappa\sigma}{2}\delta^{(2)}(\overrightarrow{r}), \tag{4.21,b}$$

$$\mu V + \mu\Delta h^{TL} = 0, \tag{4.21,c}$$

$$-\Delta n^T - \mu n = -\frac{\kappa\sigma}{2}\delta^{(2)}(\overrightarrow{r}), \tag{4.21,d}$$

$$n + \mu(n^T - v^L) = 0, \tag{4.21,e}$$

$$\mu(n^L + v^T) = 0 \tag{4.21,f}$$

que es invariante bajo (4.15). Fijamos $h^{TL} = 0$, $(\Rightarrow V = 0)$, $n^L = 0(\Rightarrow V^T = 0$ y $h^L = h^T$. Cada fijación la hacemos con una de las componentes de $\xi_m(\xi^T, \xi$ y ξ^L respectivamente). Al desacoplar el sistema obtendremos

$$n(r) = \kappa\frac{(m + \mu\sigma)}{2}Y(\mu r) \tag{4.22,a}$$

$$h^T(r) = -\kappa\frac{(m + \mu\sigma)}{2\mu^2}(C(\mu r) - Y(\mu r)) \tag{4.22,b}$$

$$n^T(r) = -\kappa\frac{(m + \mu\sigma)}{2\mu}Y(\mu r) + \frac{\kappa m}{2\mu}C(\mu r) \tag{4.22,c}$$

$$v^L(r) = \frac{\kappa m}{2\mu}C(\mu r). \tag{4.22,d}$$

Resaltamos que h_{mn} no es simétrico

Las $h_{\overline{mn}}$ correspondientes son entonces

$$h_{\overline{00}} = \kappa(m+\mu\sigma)Y(\mu r), \tag{4.23,a}$$

$$h_{\overline{0i}} = \varepsilon_{ij}\partial_j[-\frac{\kappa}{\mu}(m+\mu\sigma)Y(\mu r) + \frac{\kappa m}{\mu}C(\mu r)], \tag{4.23,b}$$

$$h_{\overline{ij}} = \delta_{ij}\kappa(m+\mu\sigma)Y(\mu r), \tag{4.23,c}$$

donde observamos que $h_{\overline{00}} \sim a_0$, $h_{\overline{0i}} \sim a_i$, en (3.16), luego de identificar $\kappa m \sim q$ $\kappa\sigma \sim g$.

El parámetro de comportamiento anyónico es para un círculo de radio R

$$\alpha_{VCS}(R) = \frac{(\kappa m)^2}{\mu} - \kappa m\kappa(m+\mu\sigma)RK_1(\mu R). \tag{4.24}$$

En (4.24) vemos que asintóticamente $\alpha_{VCS}(R \to \infty) = \alpha_{TCS}$. También sucede lo mismo para $m + \mu\sigma = 0$ y no dependerá del contorno. Asintóticamente

$$h_{\overline{00}} \sim 0,\ h_{\overline{0i}} \sim \varepsilon_{ij}\partial_j\frac{\kappa m}{\mu}C(\mu r),\ h_{\overline{ij}} \sim 0, \tag{4.25}$$

que corresponde a la (4.17). Cuando $m + \mu\sigma = 0$ las soluciones exteriores a las fuentes de ambos modelos (TCS y VCS) coinciden. Para la TM linealizada las ecuaciones de movimiento son [29]

$$\frac{1}{2}(\varepsilon^{lp}{}_r\partial_l G^{mr} + \varepsilon^{lm}{}_r\partial_l G^{pr}) - \mu G^{mp} = \mu\kappa T^{pm} \tag{4.26}$$

donde

$$G^{pm} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{prs}\varepsilon^{mlt}\partial_r\partial_l h_{\overline{st}}. \tag{4.27}$$

Con la descomposición (4.11), obtenemos que

$$G^{00} = -\frac{\Delta^2}{2}h^T, \tag{4.28,a}$$

$$G^{0i} = \frac{\Delta}{2}\varepsilon_{ij}\partial_j n^T, \tag{4.28,b}$$

$$G^{ij} = -\frac{1}{2}(\delta_{ij}\Delta - \partial_i\partial_j)n, \tag{4.28,c}$$

donde notamos que las partes sensibles a transformaciones de calibre n^L, h^{TL} y h^L no intervienen en la solución de (4.27). Tomamos $n^L = h^{TL} = 0$ y $h^L = h^T$, llegamos a que

$$h_{\overline{00}}(r) = \kappa(m + \mu\sigma)Y(\mu r), \tag{4.29,a}$$

$$h_{\overline{0i}}(r) = \varepsilon_{ij}\partial_j[-\kappa\frac{(m+\mu\sigma)}{\mu}(Y(\mu r) - C(\mu r))], \tag{4.29,b}$$

$$h_{\overline{ij}}(r) = \delta_{ij}[\kappa(m + \mu\sigma)Y(\mu r) - 2\kappa m C(\mu r)]. \tag{4.29,c}$$

Observamos que (4.29) sólo constituye la generalización uniforme del caso vectorial (la TM vectorial) cuando $\sigma = 0 (g = 0)$. En el caso especial que $m + \mu\sigma = 0$ no hay posibilidad de comportamiento anyónico $(h_{\overline{0i}} = 0)$ y la solución corresponde a la generada por una partícula masiva sin spin en la teoría de Einsten linealizada [29]. Así, puede decirse que el efecto del término CS y del T^{0i} se cancelan mutuamente.

El parámetro de comportamiento anyónico es para un círculo de radio R

$$\alpha_{TM}(R) = \frac{\kappa m \kappa(m+\mu\sigma)}{\mu}(1 - \mu R K_1(\mu R)), \tag{4.30}$$

que difiere del "correspondiente" caso vectorial (la TM vectorial), y observamos que $\alpha_{TM}(R) = 0$ (para cualquier contorno) si $m + \mu\sigma = 0$. La analogía con el modelo TM vectorial se da como dijimos, cuando $\sigma = 0(g = 0)$ [28,29,66].

4.3.- Parámetro de comportamiento anyónico de la teoría AD y de la teoría de Einstein autodual

Ya vimos para el caso vectorial que cuando hay rotura de simetría el parámetro de comportamiento anyónico se anula. Con el término TCS linealizado podemos considerar dos posibilidades: una cuando tenemos además de S_{TCS} al término de Fierz-Pauli (teoría autodual), y otra si además tenemos el de Einstein que correspondería a la gravedad de Einstein autodual. Ambas teorías

han perdido la invariancia de calibre y veremos que el parámetro de comportamiento anyónico es nulo.

Si consideramos la acción AD, partiríamos de (4.6) sumándole el término de Fierz-Pauli $\sim m^2(hh - hh)$. Las ecuaciones de movimiento para h_{mn}, son

$$\mu\varepsilon^{prs}\partial_r h_s{}^n - M^2(h^{np} - \eta^{pn}h_l{}^l) = -\kappa T^{pn}. \tag{4.31}$$

El método a seguir es el ya expuesto con T^{pn} como en (4.10) y la descomposición (4.11). Obtenemos

$$h_{00}(r) = \frac{\kappa\sigma}{2\mu}\delta^{(2)}(\overrightarrow{r}) + \frac{\kappa m_{_{AD}}}{2\mu}(m - m_{_{AD}}\sigma)Y(m_{_{AD}}r), \tag{4.32,a}$$

$$h_{i0}(r) = h_{0i}(r) = \frac{\kappa}{2\mu}(m - m_{_{AD}}\sigma)\varepsilon_{ij}\partial_j Y(m_{_{AD}}r), \tag{4.32,b}$$

$$h_{ij}(r) = \frac{\kappa\sigma}{2\mu}\delta^{(2)}(\overrightarrow{r})\delta_{ij} + \frac{\kappa m_{_{AD}}}{2\mu}(m - m_{_{AD}}\sigma)\Big(\delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{m^2_{_{AD}}}\Big)Y(m_{_{AD}}r), \tag{4.32,c}$$

y como $h_{mn} = h_{nm}$, resultará que $h_{\overline{mn}} = 2h_{mn}$. En (4.32) $m_{AD} \equiv M^2/\mu$ corresponde a la masa de las excitaciones de la teoría autodual. El parámetro de comportamiento anyónico será para un círculo de radio R

$$\alpha_{AD}(R) = \frac{\kappa m\kappa(m - m_{AD}\sigma)}{\mu} m_{AD}RK_1(m_{AD}R), \tag{4.33}$$

que tiende a cero cuando $R \to \infty$. Cuando $m - m_{AD}\sigma = 0$, α_{AD} es idénticamente cero. La analogía con el caso vectorial se obtiene si se identifica $km \leftrightarrow q$ y $k\sigma \leftrightarrow g$.

Para la teoría de Einstein autodual partiríamos del sitema

$$\begin{aligned}(\frac{1}{2}\varepsilon^{pmn}\varepsilon^{srl} - \varepsilon^{pml}\varepsilon^{srn})\partial_m\partial_r h_{sl} - \mu\varepsilon^{prs}\partial_s h_r{}^n +& \\ - M^2(h^{np} - \eta^{pn}h_l{}^l) = -\kappa T^{pn}.&\end{aligned} \tag{4.34}$$

Las masas de las excitaciones, como vimos en el Capítulo V son $(\varepsilon = \mu/M)$

$$m_\pm = \frac{M\varepsilon}{2}\Big(\sqrt{1 + \frac{4}{\varepsilon^2}} \pm 1\Big). \tag{4.35}$$

Siguiendo el mismo proceso y descrito, obtenemos, de nuevo, que $h_{mn} = h_{nm}$ y

$$h_{\overline{00}} = \frac{\kappa}{m_+ + m_-}[m_+(m - m_+\sigma)Y(m_+r)+ \\ + m_-(m + m_-\sigma)Y(m_-r)], \tag{4.36,a}$$

$$h_{\overline{0i}} = \frac{\kappa}{m_+ + m_-}\varepsilon_{ij}\partial_j[(m - m_+\sigma)Y(m_+r)- \\ - (m + m_-\sigma)Y(m_-r)], \tag{4.36,b}$$

$$h_{\overline{ij}} = \frac{\kappa}{m_+ + m_-}[m_+(m - m_+\sigma)\Big(\delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{m_+^2}\Big)Y(m_+r)+ \\ + m_-(m + m_-\sigma)\Big(\delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{m_+^2}\Big)Y(m_-r)], \tag{4.36,c}$$

El parámetro de comportamiento anyónico, para un círculo de radio R, es

$$\alpha_{E_{(AD)}}(R) = \frac{\kappa m}{m_+ + m_-}[\kappa m_+ R(m - m_+\sigma)K_1(m_+R)+ \\ -\kappa m_- R(m + m_-\sigma)K_1(m_-R)], \tag{4.37}$$

que tiende a cero si hacemos tender $R \to \infty$.

El resultado (4.36) podíamos obtenerlo directamente teniendo en cuenta el hecho que el propagador de la acción de Einstein autodual es la combinación lineal de dos propagadores autoduales. Para esto tomamos $M = \mu$ en (4.32) y tomamos esto como el resultado para la teoría AD con helicidad $+2$. Lo llamamos $h^{(+)}_{mn}(M)$. Es inmediato notar que, en virtud de la ecuación (2.18) del Capítulo V, para la teoría autodual

$$h_{mn} = \frac{1}{m_+ + m_-}[m_+ h^{(+)}_{mn}(m_+) + m_- h^{(-)}_{mn}(m_-)], \tag{4.38}$$

que corresponde a las ecuaciones (4.36).

4.4 La teoría autodual con acoplamiento no minimal

En virtud de la analogía que existen entre las teorias de spin 1 y spin 2, probamos que sucede si miramos el comportamiento

anyónico de la teoría AD con una fuente de la forma

$$\widetilde{T}^{mn} = -m_{AD}\varepsilon^{nls}\partial_l(-\Delta)^{-1}T_s{}^m, \tag{4.39}$$

con T^{mn} igual que en (4.10). Esta forma particular de fuente la escogemos en analogía con eso vectorial (ecuación (3.24)). Observamos que $\widetilde{T}^{mn}$ no es simétrica.

Partimos de (4.31) con la guente (4.39) y $m_{AD} = \frac{M^2}{\mu} = \mu$, consiguiendo en principio que h^{TL}, V, $n^L - v^T$ y $n^L + v^T$ son nulos. Las ecuaciones restantes son

$$-m_{AD}\Delta h^T + \Delta(n^T + ^L) - m_{AD}\Delta h^L = \frac{\kappa m_{AD}\sigma}{2}\delta^{(2)}(\overrightarrow{r}), \tag{4.40,a}$$

$$m_{AD}(n^T + v^L) - \Delta h^T = \kappa m C(m_{AD}r), \tag{4.40,b}$$

$$m_{AD}(n^T - v^L) - n = 0, \tag{4.40,c}$$

$$m_{AD}h^L + (n^T - v^L) + m_{AD}(-\Delta)^{-1}n = -\frac{\kappa\sigma}{2}C(m_{AD}r), \tag{4.40,d}$$

$$h^T + (-\Delta)^{-1}n = 0, \tag{4.40,e}$$

de donde

$$n(r) = \frac{\kappa m_{AD}(m - m_{AD}\sigma)}{2\mu}Y(m_{AD}r), \tag{4.41,a}$$

$$h^T(r) = -\frac{\kappa(m - m_{AD}\sigma)}{2\mu m_{AD}}(C(m_{AD}r) - Y(m_{AD}r)), \tag{4.41,b}$$

$$h^L(r) = -\frac{\kappa m}{2\mu m_{AD}}C(m_{AD}r), \tag{4.41,c}$$

$$n^T(r) = \frac{\kappa m_{AD}(m - m_{AD}\sigma)}{2\mu}Y(m_{AD}r) - \frac{km}{2\mu}C(m_{AD}r), \tag{4.41,d}$$

$$v^L(r) = -\frac{\kappa m}{2\mu}C(m_{AD}r), \tag{4.41,e}$$

Las soluciones (4.41) son iguales a las de la teoria VCS si hacemos la identificación $m_{AD} \to -\mu$, $\mu \to -\mu$ y fijamos a $\mu h^L = -v^L$. El comportamiento anyónico, a partir de (4.41) es, para un círculo de radio R

$$\widetilde{\alpha}_{AD}(R) = -\frac{\kappa^2 m^2}{\mu} + \frac{\kappa m}{\mu}k(m - m_{AD}\sigma)m_{AD}RK_1(m_{AD}R). \tag{4.42}$$

Este es igual al de la teoría TCS asintóticamente, observamos que esta igualdad de comportamientos anyónicos no depende del término inercial, sólo del término TCS. $\widetilde{\alpha}_{AD}(R) = \alpha_{VCS}(R)$ (ecuación (4.24)) si hacemos la identificación antes señalada. Concluímos entonces, que la teoría VCS en un calibre y acoplamiento minimal con la fuente (4.10) corresponde a la teoría autodual con un acoplamiento no minimal.

Capítulo **VII**

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos introducido y analizado nuevas teorías en 2+1 dimensiones. Una de estas es la Gravedad masiva Vectorial de Chern-Simons. Esta tiene la acción (Capítulo IV) [43,47]

$$S_{VCS} = S_E \pm \mu S_{TCS}, \tag{6.1}$$

donde S_E es la acción de Einstein y S_{TCS} es el término de CS triádico. S_{VCS} representa a una teoría curva que propaga una excitación masiva de helicidad $2\mu/|\mu|$. Tiene la ventaja respecto a la teoría TM existente, que es de segundo orden. Sin embargo, no tiene invariancia Lorentz local; aunque mantiene la invariancia bajo transformaciones de coordenadas. A nivel linealizado hicimos un estudio dinámico bastante amplio, que no había sido realizado ya que, S^l_{VCS}, sólo había aparecido como una acción intermedia entre la acción maestra de spin 2 y la teoría autodual [17]. Se analizó su espectro físico covariantemente, se halló su acción reducida y se analizó parcialmente con el formalismo canónico. Como posibles ampliaciones al estudio de esta teoría queda el análisis canónico de la teoría curva, así como la búsqueda de soluciones exactas a sus ecuaciones de movimiento.

Dentro de los resultados resaltantes de esta tésis está también el hecho de que los fenómenos físicos que se encuentran en las teorías de spin 1 se repiten uniformemente en las teorías de spin 2:

1) Tenemos una teoría invariante bajo P y T que describe a dos excitaciones masivas de igual masa y helicidades opuestas. Para spin 1 está la teoría de Proca, para spin 2 la de Fierz-Pauli. La "raíz" de sus ecuaciones de movimiento nos proporciona la "condición de autodualidad" que verifican las partes dinámicas del campo matriz.
2) Tenemos una teoría autodual (AD) para spin 1 y 2, cuyas ecuaciones de movimiento son justamente la condición de autodualidad (sobre a_m^T y h_{mn}^{Tt}) ya mencionadas. Estas teorías AD violan P y T, no son sensibles a transformaciones de calibre, y describen una excitación masiva de masa m y helicidad $+1$ ó -1 ($+2$ ó -2) dependiendo del signo con que aparece m en la acción. Estas acciones autoduales también existen para spines altos y conjeturamos que existen para cualquier spin entero [19,20]. La condición de autodualidad constituye una realización de la ecuación de Pauli-Lubanski que verifican las distintas representaciones irreducibles del grupo de Poincaré en 2+1 dimensiones [67].
3) Existe una teoría masiva invariante de calibre de segundo orden. Para spin 1 es la teoría TM y para spin 2 la gravedad VCS linealizada. Estas teorías son equivalentes a las teorías autoduales como teorías libres [16,18,31,44] (Capítulo II y III). Esto ocurre también con teorías de spin 3 [20]. Puede probarse, también, que las teorías son equivalentes canónicamente en el sentido que una corresponde a la otra con el calibre fijado ([36,44] y Capítulo III). Cuando hay fuentes externas las teorías deben estar acopladas de manera distinta con la fuente para mirar su equivalencia.
4) Las teorías invariantes de calibre de segundo orden pueden sufrir un proceso de rotura de simetría. Para spin 1 la teoría con simetría rota es la de Proca-Chern-Simons

$$S_{PCS} = S_{Maxwell} - \mu S_{CS} - m^2 S_P, \tag{6.2,a}$$

para spin 2 es la de Einstein autodual

$$S_E^{(AD)} = S_E - \mu S_{TCS} - m^2 S_{FP}. \tag{6.2,b}$$

Ambas teorías vimos que describen 2 excitaciones masivas, autoduales, de masas distintas

$$m_{\pm} = \frac{m\varepsilon}{2}(\sqrt{1+\frac{4}{\varepsilon^2}} \pm 1), \tag{6.3}$$

y tienen energía definida positiva (Capítulo V) [34,51,52,54,56]. Este resultado también se verifica con la teoría invariante de calibre de spin 3.
5) Es posible implementar dinámicamente estadística y spin fraccional. Para spin 1 el término responsable de esto es el de CS vectorial. Para spin 2 encontramos que es el de TCS linealizado (Capítulo VI) [66]. Este cuadro se mantiene asintóticamente en presencia del término de Maxwell, para el caso de spin 1 [29,30]; y del término de Einstein, para el caso de spin 2 [66]. Cuando hay acoplamiento minimal y se ha roto la simetría, se pierde el comportamiento anyónico. Éste se mantiene si el acoplamiento es no minimal (Capítulo VI).

Dentro de estas comparaciones incluimos a la teoría TM linealizada, encontrando que no es posible romper la invariancia de calibre de $S^{2;l}_{TM}$ parcial o totalmente (Capítulo V) ya que la teoría resultante tiene energía no acotada inferiormente. El parámetro de comportamiento anyónico no es igual al caso de spin 1 y en determinado casos $(m + \mu\sigma = 0)$ no lo hay (Capítulo VI) [66].

Finalmente queda como pregunta abierta la implementación de estadística fraccionaria a nivel covariante curvo.

Referencias

[1] D. Gross, R. D. Pisarski y L. G. Yaffe, Rev. Mod. Phys. **53** (1981) 43.

[2] G. 'tHooft, *"Dimensional Reduction in Quantum Gravity"*, Preprint THU-93/26.

[3] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **48** (1982); **49** (1982) 957.

[4] R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 2677.

[5] Y. H. Chen, F. Wilczek, E. Witten y B. I. Halperin, Int. J. Mod. Phys. **B39** (1989) 9679.

[6] R. Jackiw, Nuc. Phys. **B252** (1985) 343.

[7] B. Binegar, J. Math. Phys. **23** (1982) 1511.

[8] R. Jackiw y V. P. Nair, Phys. Rev. **D43** (1991) 1933.

[9] S. Deser y R. Jackiw, Phys. Lett. **B263** (1991) 431.

[10] J. Fröhlich y P. A. Marchetti, Commun. Math. Phys. **121** (1989) 177.

[11] S. Doplicher, R. Haag y J. E. Roberts, Commun. Math. Phys. **13** (1969) 1; **15** (1969) 173; **23** (1971) 199; **35** (1974) 49.

[12] P. de Sousa Gerbert, Nuc. Phys. **B346** (1990) 440.

[13] J. Schonfeld, Nuc. Phys. **B185** (1981) 157.

[14] S. Deser, R. Jackiw y S. Tempelton, Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 975; Ann. Phys. **140** (1982) 372; (E) **185** (1988) 406.

[15] P. K. Townsend, K. Pilch y P. van Nieuwenhuizen, Phys. Lett. **B136** (1984) 38.

[16] S. Deser y R. Jackiw, Phys. Lett. **B139** (1984) 371.

[17] C. Aragone y A. Khoudeir, Phys. Lett. **B173** (1986) 141.

[18] C. Aragone y A. Khoudeir, *"Quantum Mechanics of Fundamental Systems 1"*, Ed. C. Teitelboim, Plenum Press, N.Y. (1988) p.17.

[19] C. Aragone y A. Khoudeir, por aparecer en la Revista Mexicana de Física (1993)

[20] A. Khoudeir, Tesis de Doctorado, U.S.B. (1993); C. Aragone y A. Khoudeir, *"Massive Triadic Chern-Simons spin-3 theory"* por aparecer en los procedings del SILARG VIII, World Scientific (1993).

[21] D. Arovas, R. Schrieffer, F. Wilczek y A. Zee, Nuc. Phys. **B251** (1985) 117.

[22] S. Forte, Rev. Mod. Phys. **64** (1992) 193.

[23] R. Jackiw, Ann. Phys. **201** (1990) 83.

[24] E. Dzyaloshinski, A. M. Polyakov y P. B. Wiegman, Phys. Lett. **A127** (1988) 112.

[25] X. G. Wen y A. Zee., Nucl. Phys. Proc. Suppl. **15** (1990) 135.

[26] B. De Witt, Phys. Rev. Lett. **16** (1966) 1902.

[27] J. S. Dowker y J. A. Roche, Proc. Phys. Soc. **92** (1967) 1.

[28] M. Ortiz, Nuc. Phys. **B375** (1991) 127.

[29] S. Deser, Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 611.

[30] S. Deser y J. Mc. Carthy, Nuc. Phys. **B344** (1990) 747; S. Deser, Class. Quantum Grav. **9** (1992) 61.

[31] S. Deser y J. Mc Carthy, Phys. Lett. **B245** (1990) 441; (A) **B248** (1990) 473.

[32] X. G. Wen y A. Zee, J. Phys. France **50** (1989) 1623.

[33] D. Boyanovsky, Phys. Rev. **D42** (1990) 1179.

[34] S. K. Paul y A. Khare, Phys. Lett. **B171** (1986) 244.

[35] S. Deser, En *College Park 1993, Directions in General Relativity*, Vol. 2, p. 114 .

[36] R. Gianvittorio, A. Restuccia y J. Stephany, Mod. Phys. Lett. **A6** (1991) 2121.

[37] C. R. Hagen, Phys. Rev. Lett. **58** (1987) 1074.

[38] S. Deser y R. Jackiw, Phys. Rev. Lett. **59** (1987) 1981; C. R. Hagen, Phys. Rev. Lett. **59** (1987) 1982.

[39] S. M. Latinsky y D. P. Sorokin, *"On a non-minimal gauge interaction of scalar fields in D=2+1 Chern-Simons-Maxwell theory"*, Preprint KFTI 91-92, Kharkov Institute of Physics and Technology.

[40] S. Deser, R. Jackiw y G. 'tHooft, Ann. Phys. **152** (1984) 220.

[41] S. Giddins, J. Abbot y K. Kuchar, Gen. Rel. Grav. **16** (1984) 751.

[42] J. R. Gott III y M. Alpert, Gen. Rel. Grav. **16** (1984) 243.

[43] C. Aragone, P. J. Arias y A. Khoudeir, *"Massive Vector Chern-Simons Gravity"*, Preprint SB/F/92/192, U.S.B.(Por aparecer en Nuovo Cimento **B**) (Nuov. Cim. **109B** (1994) 303).

[44] P. J. Arias y J. Stephany, *"Gauge Invariance and Second class constraints in 3-D linearized massive gravity"*, Preprint SB/F/93/210, U.S.B. (J. Math. Phys. **36** (1995) 1868).

[45] P. Senjanovic, Ann. Phys. **100** (1976) 227.

[46] R. Jackiw, en *"Relativity and Gravitation: Classical and Quantum"*, Proceedings del SILARG VII, Eds. J.C. D'Olivo et al., World Scientific (1991) p. 74.

[47] C. Aragone, P. J. Arias y A. Khoudeir, *"Light-front dynamics of Massive Vector Chern-Simons gravity"*, proceedings del SILARG VIII, World Scientific (1993), p.523, hep-th/9309132.

[48] Y. Hosotani, Phys. Lett. **B319** (1993) 332.

[49] G. 'tHooft, Commun. Math. Phys. **117** (1988) 685.

[50] E. W. Mielke y P. Baekler, Phys. Lett. **A156** (1991) 399.

[51] C. Aragone y P. J. Arias, Mod. Phys. Lett. **A5** (1990) 1651.

[52] C. Aragone, P. J. Arias y A. Khoudeir, en *"Relativity and Gravitation: Classical and Quantum"*, Proceedings del SILARG VII, Eds. J.C. D'Olivo et al., World Scientific (1991), p. 437.

[53] C. Itzykson y J. B. Zuber, *"Quantum Field Theory"*, Ed. Mc Graw Hill International, p. 162.

[54] C. Aragone, P. J. Arias y A. Khoudeir, *"Spontaneously broken Einstein Selfdual massive spin two theory"*, Preprint SB-F-162, U.S.B..

[55] C. Aragone, P. J. Arias y A. Khoudeir, *"Two Gravitationally Chern-Simons terms are too many"*, hep-th/9309149.

[56] C. Aragone, P. J. Arias y A. khoudeir, *"On the spontaneous breakdown of topological massive gravities"*, Preprint SB/F/93/202, U. S.

B. (Nuov. Cim. **112B** (1997) 63).

[57] G. Morandi, *"The role of topology in Classical and Quantum Physics"*, Lecture Notes in Physics, m. 7, Springer Verlag.

[58] A. P. Balachandran, Int. J. Mod. Phys. **B5** (1991) 2585.

[59] J. P. Lupi, Trabajo de grado, U.S.B. (1992).

[60] J. M. Leinaas y J. Myrheim, Il Nuovo Cimento, **37** (1977) 1.

[61] Y. S. Wu, Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 2108.

[62] M. Laidlaw, C.M. deWitt Phys. Rev. **D3**(1971) 1375.

[63] J. S. Dowker, J. Phys. **A5** (1972) 936.

[64] L. Schulman, Phys. Rev. **176** (1968) 1558.

[65] R. Mackenzie y F. Wilczek, Int. J. Mod. Phys. **A3** (1988) 2827.

[66] C. Aragone y P. J. Arias, *"More gravitational anyons"'*, proceedings del SILARG VIII, World Scientific (1993), p. 553, hep-th/9309131.

[67] T. Gonera y P. Kosinski, Phys. Lett. **B268** (1991) 81.

APÉNDICE A

CONVENCIONES PARA TEORÍAS DE GRAVEDAD CURVA Y LINEALIZADA

A.1 Transformaciones bajo difeomorfismos

Ante un cambio de coordenadas

$$x \to x' = x - \xi(x), \tag{A.1}$$

los objetos quedan definidos por su comportamiento ante estas transformaciones:
a) Un escalar cambia como

$$\delta f(x) = \xi^m \partial_m f, \tag{A.2}$$

b) Para vectores covariantes U_m y contravariantes V^m

$$\delta U_m = \xi^n \partial_n U_m + (\partial_m \xi^n) U_n, \quad \text{(A.3,a)}$$

$$\delta V^m = \xi^n \partial_n V^m - \partial_n \xi^m V^n, \quad \text{(A.3,b)}$$

c) Un tensor general cambia como

$$\delta T^{m_1 \cdots m_j}{}_{n_1 \cdots n_j} = \xi^n \partial_n T^{m_1 \cdots m_j}{}_{n_1 \cdots n_j} + \partial_{n_1} \xi^p T^{m_1 \cdots}_{p n_2 \cdots} + \\ + \partial_{n_2} \xi^p T^{m_1 \cdots}_{n_1 p \cdots} + \cdots \quad \text{(A.3,c)}$$

d) Una densidad de peso p

$$\delta h = \xi^n \partial_n h - p \partial_n \xi^n h, \tag{A.4}$$

e) Para una densidad vectorial k^m de peso p

$$\delta k^m = \xi^n \partial_n k^m - (\partial_n \xi^m) k^n - p \partial_n \xi^n k^m, \tag{A.5}$$

A.2 Derivadas covariantes, conexiones, tensores de Riemmann, Ricci y Einstein

Las derivadas covariantes de un vector covariante o contravariante son

$$\mathcal{D}_m U_n = \partial_m U_n - \Gamma^l_{mn} U_l, \tag{A.6,a}$$

$$\mathcal{D}_m V^n = \partial_m V^n + \Gamma^n_{ml} V^l, \tag{A.6,b}$$

las cuales transforman bajo difeomorfismos como vectores. ${\Gamma_{mn}}^l$ no es un buen tensor, pero la torsión si lo es

$${T_{mn}}^l \equiv \Gamma^l_{mn} - \Gamma^l_{nm}. \tag{A.7}$$

El tensor de curvatura ${R_{mnl}}^s$ se define por el conmutador entre derivadas covariantes

$$[\mathcal{D}_m, \mathcal{D}_n] V^l = {R_{mns}}^l V^s - {T_{mn}}^s \mathcal{D}_s V^l, \tag{A.8}$$

donde

$${R_{mns}}^l = \partial_m \Gamma^l_{ns} + \Gamma^l_{mr} \Gamma^r_{ns} - (m \leftrightarrow n). \tag{A.9}$$

Las identidades de Jacobi para los conmutadores permite hallar las identidades de Bianchi para ${T_{mn}}^l$ y ${R_{mnl}}^s$

$$\mathcal{D}_r R_{mns}{}^l + T_{mn}{}^t R_{trs}{}^l + \big(\text{Cíclicos en } r, m, n\big) = 0, \qquad \text{(A.10,a)}$$

$$R_{mnr}{}^t - \mathcal{D}_r T_{mn}{}^t - T_{mn}{}^s T_{sr}{}^t + \big(\text{Cíclicos en } r, m, n\big) = 0 \qquad \text{(A.10,b)}$$

Con el tensor de curvatura o tensor Riemmann se define el tensor de Ricci como la contracción

$$R_{mn} \equiv R_{lmn}{}^l = R_{nm}, \qquad \text{(A.11,a)}$$

el cual al contraerlo, da el escalar de curvatura

$$R \equiv R_m{}^m. \qquad \text{(A.11,b)}$$

En d dimensiones el tensor de curvatura tiene $(1/12)d^2(d^2-1)$ componentes independientes y el de Ricci $(1/12)d(d+1)$.

Con R_{mn} y R se define el tensor Einstein como

$$G_{mn} = R_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} R \qquad \text{(A.12)}$$

el cual es covariantemente conservado, en virtud de las identidades de Bianchi (A.10)

$$\mathcal{D}_m G^{mn} = 0. \qquad \text{(A.13)}$$

A.3 Particularidades en d=2+1

En tres dimensiones, el tensor de Einstein y de Riemmann tiene el mismo número de componentes independientes. Así que uno puede expresarse en función del otro. De hecho

$$R_{mnl}{}^s = -\varepsilon_{mnt} \varepsilon^s{}_{pl} G^{tp}. \qquad \text{(A.14)}$$

Así, no es posible definir el tensor de Weyl de manera usual. Sin embargo tenemos un tensor conforme. Este es el tensor de Cotton

$$C^{mn} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \varepsilon^{mpl} \mathcal{D}_p \widetilde{R}_l{}^n, \tag{A.15}$$

el cual es simétrico, tiene traza nula y es covariantemente conservado. En (A.15)

$$\widetilde{R}_m{}^n = R_m{}^n - \frac{1}{4} \delta_m{}^n R \tag{A.16}$$

A.4 Lenguaje de las Tríadas

Resulta conveniente, en ocasiones, remitirse al espacio tangente de la variedad. Ahí, introducimos las tetradas (vielbeins), e_a, las cuales tienen componentes curvilíneas $e_a{}^m$, sus duales, e^a, tendrán componentes $e_m{}^a$. Así

$$e_a{}^m e_m{}^b = \delta_a{}^b. \tag{A.17}$$

Referimos a los índices "de mundo" con las letras intermedias del alfabeto y a los índices del espacio tangente con las primeras letras del alfabeto.

En el espacio tangente definimos las transformaciones que conservan la norma $V_a U^a$

$$\delta V^a = V^b X_b{}^a, \quad \delta U_a = -X_b^a U_a, \tag{A.18}$$

y respecto a estas transformaciones tenemos las derivadas covariantes

$$D_m U_a = \partial_m U_a - \omega_{ma}{}^b U_b, \tag{A.19,a}$$

$$D_m V^a = \partial_m V^a + V^b \omega_{mb}{}^a. \tag{A.19,b}$$

$\omega_{ma}{}^b$ transforma como una buena conexión

$$\delta \omega_{mb}{}^a = -D_m X_b{}^a \tag{A.20}$$

Para objetos mixtos, como por ejemplo $e_m{}^a$, la derivada covariante total es

$$\mathcal{D}_m e_n{}^a = D_m e_n{}^a - \Gamma^l_{mn} e_l{}^a. \tag{A.21}$$

Por consistencia entre las definiciones se pide que $\mathcal{D}_m \ \ e_m{}^a = 0$. Así

$$D_m e_n{}^a = \Gamma^l_{mn} e_l{}^a, \tag{A.22}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} T_{mn}{}^l e_l{}^a &= (D_m e_n{}^a - D_n e_m{}^a) e_a{}^l \\ &\equiv T_{mn}{}^a e_a{}^l \end{aligned} \tag{A.23}$$

Cuando $T_{mn}{}^a = 0$ es posible obtener $\omega_m{}^a$ en función de $e_m{}^a$. Podemos, también, definir el análogo al tensor de curvatura. Este es $R_{mna}{}^b = \partial_m \omega_{na}{}^b - \partial_n \omega_{ma}{}^b + \omega_{na}{}^c \omega_{mc}{}^b - \omega_{nb}{}^c \omega_{mc}{}^a$, y

$$[D_m, D_n] V^a = V^b R_{mnb}{}^a. \tag{A.24}$$

Resulta que

$$R_{mna}{}^b = R_{mnl}{}^s e_s{}^b e^l{}_a \tag{A.25}$$

En dimensión $2+1$ llamamos al vielbein, dreibein (tríada). En esta dimensión podemos definir "duales" a los $R_{mna}{}^b$, $\omega_{ma}{}^b$, $\cdots$

$$\omega_m{}^a \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{abc} \omega_{mbc} \tag{A.26,a}$$

$$R^*_{mn}{}^a = \frac{1}{2} \varepsilon^{abc} R_{mnbc}, \tag{A.26,b}$$

Y, aún mas

$$\begin{aligned} R^{**pa} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{pmn} R^*_{mn}{}^a \\ &= \frac{1}{4} \varepsilon^{pmn} \varepsilon^{abc} R_{mnbc}. \end{aligned} \tag{A.26,c}$$

El determinante de dreibein es

$$e = -\frac{1}{3!}\varepsilon^{pmn}\varepsilon_{abc}e_p{}^a e_m{}^b e_n{}^c, \tag{A.27}$$

así

$$e_a{}^p = \frac{1}{2e}\varepsilon^{pmn}\varepsilon_{abc}e_m{}^b e_n{}^c. \tag{A.28}$$

Puede mostrarse que

$$R^{**pa}e_a{}^r = eG^{pr}. \tag{A.29}$$

Por último, la solución a (A.23) es

$$e\omega_m{}^a = (e_{mb}e_p{}^a\varepsilon^{prs}\partial_r e_s{}^b - \frac{1}{2}e_m{}^a e_{pb}\varepsilon^{prs}\partial_r e_s{}^b) \tag{A.30}$$

A.5 La acción de Einstein y su linealización

La acción de Einstein

$$S_E = -\frac{1}{2k^2}\left\langle\sqrt{-g}R\right\rangle, \tag{A.31}$$

se escribe, alternativamente, como

$$S_E = \frac{1}{2k^2}\left\langle e_{pa}\varepsilon^{pmn}R^*_{mn}{}^a\right\rangle. \tag{A.32}$$

La prescripción al linearizar es $e_m{}^a = \delta_m{}^a + kh_m{}^a$, obtenemos entonces

$$S^l_E = \frac{1}{2}\left\langle 2h_{pa}\varepsilon^{pmn}\partial_m\omega_n{}^a - (\omega_{ma}\omega^{am} - \omega_m{}^m\omega_a{}^a)\right\rangle. \tag{A.33}$$

Al linearizar la métrica $(g_{mn} = \eta_{mn} + kh^{(s)}_{mn})$ el tensor de Einstein es

$$\begin{aligned} G^{mn} &= \frac{1}{2}(-\Box h^{(s)mn} + \partial^m\partial_l h^{(s)ln} + \partial^n\partial_l h^{(s)lm} + \\ &\qquad - \partial^m\partial^n h^{(s)r}_r + \eta^{mn}(\Box h^{(s)} - \partial_r\partial_s h^{rs})) \qquad (A.34) \\ &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{mrs}\varepsilon^{nlp}\partial_r\partial_l h^{(s)}_{sp} \qquad (A.35) \end{aligned}$$

A nivel linealizado (A.30) se escribe como

$$\omega_m{}^a = -\frac{1}{2}\delta_m{}^a \varepsilon^{pnr}\partial_p h_{nr} + \varepsilon^{anr}\partial_n h_{rm} \tag{A.36}$$

que podemos sustituir en (A.33) y obtenemos

$$S_E = -\frac{1}{4} < h^{(s)}_{pa} G^{pa} > \tag{A.37}$$

con

$$h^{(s)}_{pa} = h_{pa} + h_{ap} \tag{A.38}$$

APÉNDICE B

OPERADORES DE PROYECCIÓN Y TRANSFERENCIA PARA TEORÍAS DE SPIN 2 EN D=2+1

Para el cálculo de los propagadores de teorías de gravedad linealizada, resulta de gran utilidad el uso de los operadores de proyección. Estos proyectan al campo h_{mn} en sus distintas partes irreducibles, lo cual convierte el problema de hallar el propagador en uno netamente algebraico.

Además de estos operadores de proyección, los cuales como veremos constituyen una descomposición de la "unidad", necesitamos los operadores de transferencia. Estos tienen la propiedad de transferir una componente irreducible, de h_{mn}, a otra de igual spin. Especializamos a D=2+1 lo ya hecho en D=3+1 [1,2].

Para campos vectoriales, la construcción de los operadores de proyección, es un problema trivial. Además de que no es necesario introducir operadores de transferencia.

Introducimos, primeramente los operadores

$$\widehat{\partial}^m \equiv \frac{\partial^m}{\Box^{1/2}}, \tag{B.1}$$

los cuales cumplen

$$\widehat{\partial}_m \widehat{\partial}^m = 1. \tag{B.2}$$

La acción de $\widehat{\partial}_m$ se entiende en el espacio de Fourier, ya que si

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k e^{-ik^n x_n} \varphi(k),$$

entonces

$$\widehat{\partial}_m \varphi(x) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{e^{-ik^n X_n} i k_m \varphi(k)}{(k^l k_l)^{1/2}}. \tag{B.3}$$

Introducimos el proyector transverso

$$P_m{}^n \equiv \delta_m{}^n + \omega_m{}^n, \tag{B.4}$$

donde $\omega_m{}^n = \widehat{\partial}_m \widehat{\partial}^n$. El proyector $P_m{}^n$ manda a cualquier campo vectorial V_n en su parte transversa

$$P_m{}^n V_n \equiv V_m^T \; ; \; \widehat{\partial}^m V_m^T = 0. \tag{B.5}$$

Como es sabido la parte de spin 1 de un campo vectorial está en su parte transversa V_m^T. Esta, a su vez, tiene dos helicidades posibles. Podemos proyectar a V_m^T en estas, con los proyectores $P_{\pm m}{}^n$, definidos por

$$P_{\pm m}{}^n \equiv \frac{1}{2}(P_m{}^n \pm \xi_m{}^n), \tag{B.6}$$

donde hemos introducido el operador

$$\xi_m{}^n \equiv \varepsilon_m{}^{rn} \widehat{\partial}_r, \tag{B.7}$$

el cual es como la "raíz" de $P_m{}^n$ y además es sensible a paridad. Así que los proyectores $P_{\pm m}{}^n$ son sensibles, también, a paridad.

Los operadores $P_m{}^n$, $P_{\pm m}{}^n$ y $\xi_m{}^n$, verifican el álgebra

$$P_m{}^n P_n{}^l = P_m{}^l, \tag{B.8,a}$$

$$\xi_m{}^n \xi_n{}^l = P_m{}^l, \tag{B.8,b}$$

$$P_m{}^n \xi_n{}^l = \xi_m{}^n P_n{}^l = \xi_m{}^l \tag{B.8,c}$$

$$P_{\pm m}{}^n P_n{}^l = P_m{}^n P_{\pm n}{}^l = P_{\pm m}{}^l, \tag{B.8,d}$$

$$P_{\pm m}{}^n \xi_n{}^l = \xi_m{}^n P_{\pm n}{}^l = \pm P_{\pm m}{}^l, \tag{B.8,e}$$

La descomposición de la unidad para campos vectoriales es entonces

$$1_m{}^n = P_{+m}{}^n + P_{-m}{}^n + \omega_m{}^n, \tag{B.9}$$

donde $\omega_m{}^n$ es el proyector en la parte de spin 0. Podemos pasar ahora a los proyectores para las distintas partes de un objeto de 2 índices, h_{mn}.

Hacemos una descomposición primaria de la unidad, $1_{mn}{}^{ls} \equiv \delta_m{}^l \delta_n{}^s$, en sus partes simétrica y antisimétrica.

$$1 = S + A, \tag{B.10}$$

donde

$$S_{mn}{}^{ls} = \frac{1}{2}(\delta_m{}^l \delta_n{}^s + \delta_m{}^s \delta_n{}^l), \tag{B.11,a}$$

$$A_{mn}{}^{ls} = \frac{1}{2}(\delta_m{}^l \delta_n{}^s - \delta_m{}^s \delta_n{}^l). \tag{B.11,b}$$

La parte de spin 2 de h_{mn} está en la componente simétrica, transversa y sin traza $h_{mn}{}^{Tt}$ $(h_{mn}{}^{Tt} = h_{nm}{}^{Tt}, \eta^{mn} h_{mn}{}^{Tt} = \widehat{\partial}^m h_{mn}{}^{Tt} = 0)$. Su parte de spin 1 se encuentra al tomar divergencia respecto a algún índice, y la parte de spin 0 al tomar traza, o la doble divergencia. Siguiendo estos lineamientos tenemos que las 9 componentes que originalmente tienen h_{mn}, de las cuales extraemos 6 con S y 3 con A, quedarán repartidas así:

$$S: \; 6 \text{ en la parte simétrica} \begin{cases} 2 & \text{de spin } 2 \\ 2 & \text{de spin } 1 \\ 2 & \text{de spin } 0 \end{cases}$$

$$A: \; 3 \text{ en la parte antisimétrica} \begin{cases} 2 & \text{de spin } 1 \\ 1 & \text{de spin } 0 \end{cases}$$

Así para la parte simétrica, tenemos que los proyectores que nos extraen las partes de spin 2, spin 1 y spin 0, de $S_{mn}{}^{ls} h_{ls} = h^{(s)}_{mn}$, son respectivamente

$$P^2_{S\ mn}{}^{ls} = \frac{1}{2}(P_m{}^l P_n{}^s + P_m{}^s P_n{}^l - P_{mn} P^{ls}), \tag{B.12,a}$$

$$P^1_{S\ mn}{}^{ls} = \frac{1}{2}(P_m{}^l \omega_n{}^s + P_m{}^s \omega_n{}^l + P_n{}^l \omega_m{}^s + P_n{}^s \omega_m{}^l), \tag{B.12,b}$$

$$P^0_{S\ mn}{}^{ls} = \frac{1}{2} P_{mn} P^{ls}, \tag{B.12,c}$$

$$P^0_{W\ mn}{}^{ls} = \omega_{mn} \omega^{ls}, \tag{B.12,d}$$

Observamos que por construcción P^2_S es transverso y sin traza, requerimiento exigido a la parte de spin 2. Para P^1_S vemos que es una construcción simétrica donde primero se toma la divergencia y luego se proyecta “lo que queda” en su parte transversa. Finalmente, para las componentes de spin 0, P^0_W toma la doble divergencia y P^0_S está relacionado con la traza. Una manera alterna para las componentes de spin 0 es construir el proyector que extrae la traza

$$T_{mn}{}^{ls} \equiv \frac{1}{3} \eta_{mn} \eta^{ls}, \tag{B.13}$$

y luego exigiendo que $S = P^2_S + P^1_S + T + R$, queda perfectamente identificado el proyector que estará relacionado con la doble divergencia, de manera análoga como está relacionado P^0_S con la traza, de $h^{(s)}_{mn}$. Así [2]

$$R_{mn}{}^{ls} = \frac{1}{6} Q_{mn} Q^{ls}, \tag{B.14}$$

donde

$$Q_{mn} \equiv \eta_{mn} - 3\widehat{\partial}_m\widehat{\partial}_n. \tag{B.15}$$

Nosotros tomamos (B.12) como la descomposición de S. Es decir

$$S = P_S^2 + P_S^1 + P_S^0 + P_W^0. \tag{B.16}$$

La descomposición de A, se obtiene de forma análoga. Tenemos que los proyectores en las partes de spin 1 y spin 0, son entonces

$$P^1_{E\ mn}{}^{ls} = \frac{1}{2}(P_m{}^l\omega_n{}^s - P_m{}^s\omega_n{}^l - P_n{}^l\omega_m{}^s + P_n{}^s\omega_m{}^l), \tag{B.17,a}$$

$$P^0_{B\ mn}{}^{ls} = \frac{1}{2}(P_m{}^lP_n{}^s - P_m{}^sP_n{}^l). \tag{B.17,b}$$

En particular P_B^0 puede reescribirse como

$$P^0_{B\ mn}{}^{ls} = -\frac{1}{2}\xi_{mn}\xi^{ls}. \tag{B.17,a}$$

concluimos, entonces, que la unidad se descompone como

$$\begin{aligned} 1 &= S + A \\ &= (P_S^2 + P_S^1 + P_S^0 + P_W^0) + (P_E^1 + P_B^0). \end{aligned} \tag{B.18}$$

La proyección en cada una de las partes de h_{mn} puede, todavía, particularizarse mas. Esto se debe a que cada componente de spin distinto de 0 tiene dos helicidades posibles. Además, si tomamos la "traza" de P_S^2, P_S^1, P_E^1 (i.e. traza de $P_{mn}{}^{ls}$ es $P_{mn}{}^{mn}$), estas dan 2, lo que corresponde a la "dimensión" del subespacio en que se proyecta. En particular para la parte simétrica, transversa y sin traza (o de spin 2) reconocemos sus dos partes [3]

$$h^{(\pm)Tt}_{mn} = \frac{1}{2}[h^{Tt}_{mn} \pm \frac{1}{2}(\xi_m{}^r\delta_n{}^s + \xi_n{}^s\delta_m{}^r)h^{Tt}_{rs}]. \tag{B.19}$$

Así, tenemos que

$$P^2_{\pm Smn}{}^{ls} = \frac{1}{4}[P_{\pm m}{}^l P_n{}^s + P_{\pm m}{}^s P_n{}^l + P_{\pm n}{}^l P_m{}^s + P_{\pm n}{}^s P_m{}^l - P^{mn} P_{ls}], \quad (B.20)$$

y ya que $P_m{}^n = P_{+m}{}^n + P_{-m}{}^n$, es fácil convencerse que

$$P^1_{\pm Smn}{}^{ls} = \frac{1}{2}(P_{\pm m}{}^l \omega_n{}^s + P_{\pm m}{}^s \omega_n{}^l + P_{\pm n}{}^l \omega_m{}^s + P_{\pm n}{}^s \omega_m{}^l), \quad (B.21,a)$$

$$P^1_{\pm Emn}{}^{ls} = \frac{1}{2}(P_{\pm m}{}^l \omega_n{}^s - P_{\pm m}{}^s \omega_n{}^l - P_{\pm n}{}^l \omega_m{}^s + P_{\pm n}{}^s \omega_m{}^l), \quad (B.21,b)$$

Además

$$P^2_S = P^2_{+S} + P^2_{-S}, \quad (B.22,a)$$

$$P^1_S = P^1_{+S} + P^1_{-S}, \quad (B.22,b)$$

$$P^1_E = P^1_{+E} + P^1_{-E}, \quad (B.22,c)$$

Así en dimensión $D = 2+1$ tenemos un proyector para cada una de las componentes irreducibles de h_{mn}. Cada uno de estos proyectores es ortogonal al otro, como se mostrará mas adelante.

A pesar de la completitud de estos proyectores, antes construidos, no es posible construir con ellos a todo operador diferencial que actúe sobre un objeto de 2 índices. Existen otros operadores, u operadores de transferencia, que mandan una parte de spin y helicidad definida en otra de igual spin y helicidad. Estos son $P^0_{SW}, P^0_{WS}, P^0_{BW}, P^0_{WB}, P^0_{SB}, P^0_{BS}, P^1_{ES}$ y P^1_{SE}, donde la letra subíndice indica primero el sector de llegada y segundo el de partida. Pedimos que además cumplan $P^0_W P^0_{WS} = P^0_{WS}$, $P^0_{WS} P^0_{SW} = P^0_S$, $P^0_{SW} P^0_{WS} = P^0_S$, $P^1_{SE} P^1_{ES} = P^1_S$ etc.. Obteniendo

$$P^0_{SWmn}{}^{ls} = \frac{1}{\sqrt{2}} P_{mn} \omega^{ls}, \quad (B.23,a)$$

$$P^0_{WSmn}{}^{ls} = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_{mn} P^{ls}, \quad (B.23,b)$$

$$P^0_{SBmn}{}^{ls} = \frac{1}{2} P_{mn} \xi^{ls}, \tag{B.23,c}$$

$$P^0_{BSmn}{}^{ls} = -\frac{1}{2} \xi_{mn} P^{ls}, \tag{B.23,d}$$

$$P^0_{WBmn}{}^{ls} = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_{mn} \xi^{ls}, \tag{B.23,e}$$

$$P^0_{BWmn}{}^{ls} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \xi_{mn} \omega^{ls}, \tag{B.23,f}$$

$$P^1_{ESmn}{}^{ls} = \frac{1}{2}(P_m{}^l \omega_n{}^s + P_m{}^s \omega_n{}^l - P_m{}^l \omega_n{}^s - P_m{}^s \omega_n{}^l), \tag{B.23,g}$$

$$P^1_{SEmn}{}^{ls} = \frac{1}{2}(P_m{}^l \omega_n{}^s - P_m{}^s \omega_n{}^l + P_n{}^l \omega_m{}^s - P_n{}^s \omega_m{}^l), \tag{B.23,h}$$

Además P^1_{SE} y P^1_{ES} tienen sus respectivas versiones $P^1_{\pm SE}$ y $P^1_{\pm ES}$, con $P^1_{SE} = P^1_{+SE} + P^1_{-SE}$ y $P^1_{ES} = P^1_{+ES} + P^1_{-ES}$, donde en vez de $P_m{}^n$ ponemos $P_{\pm m}{}^n$. Para los sectores, de spin 2 (partes + y -) no hay, por definición, operadores de transferencia.

Si llamamos P^α_I a los proyectores, con $\alpha = 0, 1, 2$ e $I = S, W, E$ o B, según el caso, y P^α_{IJ} a los operadores de transferencia, tendremos que se verifica el siguiente álgebra

$$P^\alpha_I P^\beta_J = \delta^{\alpha\beta} \delta_{IJ} P^\beta_J, \tag{B.24,a}$$

$$P^\alpha_I P^\beta_{JK} = \delta^{\alpha\beta} \delta_{IJ} P^\beta_{IK}, \tag{B.24,b}$$

$$P^\alpha_{IJ} P^\beta_K = \delta^{\alpha\beta} \delta_{JK} P^\beta_{IK}, \tag{B.24,c}$$

$$P^\alpha_{IJ} P^\beta_{KL} = \delta^{\alpha\beta} \delta_{JK} P^\beta_{IL} \quad si \quad I \neq L, \tag{B.24,d}$$

$$P^\alpha_{IJ} P^\beta_{KI} = \delta^{\alpha\beta} \delta_{JK} P^\beta_I, \tag{B.24,e}$$

donde no se aplica la convención de suma de Einstein. Para los proyectores y operadores con versiones + y - estas reglas se cumplen entre proyectores u operadores de igual "helicidad".

El proyector transverso respecto al 1er índice.

Para el cálculo de algunos propagadores necesitamos escoger el calibre $\widehat{\partial}^m h_{mn} = 0$. Esto es equivalente a pedir que

$$\omega^{ml}\eta^{ns}h_{ls} = 0. \tag{B.25}$$

Resulta que

$$\omega_m{}^l\delta_n{}^s = (P_W^0 + \frac{1}{2}(P_S^1 + P_E^1 - P_{SE}^1 - P_{ES}^1))_{mn}{}^{ls}. \tag{B.26}$$

Como $h = (P_S^2 + P_S^1 + P_S^0 + P_W^0 + P_E^1 + P_B^0)h$, si definimos $h^T \equiv \{h_{mn}\ t.q.\ \partial^m h_{mn} = 0\}$, tendremos que

$$\begin{aligned} h^T &= (P_S^2 + P_S^0 + P_B^0 + \frac{1}{2}(P_{SE}^1 + P_{ES}^1 + P_S^1 + P_E^1))h \\ &\equiv T_{mn}{}^{ls}h_{ls}, \end{aligned} \tag{B.27}$$

y $T_{mn}{}^{ls}$ es un proyector, con las características exigidas

$$T_{mn}{}^{ls} = P_m{}^l P_n{}^s + P_m{}^l\omega_n{}^s, \tag{B.28,a}$$

$$T_{mn}{}^{ls}T_{ls}{}^{pr} = T_{mn}{}^{pr} \quad ; \quad \widehat{\partial}^m T_{mn}{}^{ls} = 0. \tag{B.28,b}$$

Si h_{mn} fuera además simétrico, el que sea transverso respecto a un índice implicaría, que lo es respecto al otro. La construcción del proyector es mas sencilla y resulta ser

$$T^{(S)} = P_S^2 + P_S^0 \tag{B.29,a}$$

$$T_{mn}^{(S)ls} = \frac{1}{2}(P_m{}^l P_n{}^s + P_m{}^s P_n{}^l). \tag{B.29,b}$$

Observamos que $tr(T) = 6$ y $tr(T^{(s)}) = 3$, como debe ser.

Referencias

[1] K. J. Barnes, J. Math. Phys. **6** (1965) 788; P. van Nieuwenhuizen, Nuc. Phys. **B60** (1973) 478.

[2] R. J. Rivers, Nuov. Cim. **24** (1964) 386.

[3] C. Aragone y A. Khoudeir, Phys. Lett. **B173** (1986) 141.